

5.8.253

5.8-253

A



LEZIONI ^{BI}

ELEMENTARI

D I

MATEMATICA

OVVERO

ELEMENTI D' ALGEBRA
E DI GEOMETRIA

Del Signor Abbate DE LA CAILLE

Tradotti in Italiano, e commentati.

SECONDA EDIZIONE

Nuovamente corretta, e accresciuta.

*Nella Libreria di Mr. Giuseppe
di Firenze
nell'an.*



Li. B. B. Minimi.

1781/3

I N N A P O L I MDCCLXXVI
PRESSO I FRATELLI RAIMONDI
CON LICENZA DE' SUPERIORI.



Handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is illegible due to the quality of the scan and the cursive nature of the handwriting.



LEZIONI

ELEMENTARI

DELLE

MATEMATICHE

IDEA GENERALE DELLE
MATEMATICHE,

E Definizioni de' principali termini.

1.  I chiamano *Matematiche* tutte le Scienze , che han per oggetto la grandezza , o la quantità .
2. Per queste parole *quantità* , o *grandezza* , s' intende tutto ciò , che può concepirsi composto di parti ; tutto ciò , che può ricevere aumento , o diminuzione .

A

3. Si

3. Si può concepire la *quantità*, o come composta di parti separate l'una dall'altre, o come composta di parti unite, e legate fra loro. Per esempio un mucchio d'arena è una quantità, che si concepisce composta di parti separate fra loro; un bastone è una grandezza, che si concepisce composta di parti unite, o continue.

4. La quantità composta di parti separate s'esprime co' Numeri, ed è l'oggetto dell'*Aritmetica*.

5. La quantità, le cui parti sono continue, è ciò, che si chiama *Estensione*, ed è l'oggetto della *Geometria*.

6. Di modo che l'*Aritmetica*, e la *Geometria* racchiudono tutte le Scienze Matematiche; e che quelle che si chiamano, per esempio, l'*Astronomia*, la *Meccanica*, l'*Ottica* ec. non sono altro, che una applicazione dell'*Aritmetica*, e della *Geometria* ad oggetti particolari, quali sono i moti degli Astri, le leggi dell'urto, e dell'equilibrio, le proprietà della luce ec. Non si possono dunque possedere queste Scienze, senza sapere l'*Aritmetica*, e la *Geometria*.

7. Le Matematiche s'estendono sopra quasi tutte le cognizioni umane; elleno servono a distinguere le false dalle vere, a convincere l'animo delle verità di già conosciute, a scoprire delle nuove, ed a recar con una intera certezza la perfezione in tutte le Scienze, che l'uomo può acquistare per mezzo della sua sola ragione.

8. Per

8. Per giugnere a questa perfezione i Matematici si servono prima delle *Definizioni*, cioè a dire, determinano per mezzo d'una spiegata netta, e precisa la significazione delle parole, e la natura delle cose, delle quali parlano. Pongono poi gli *Affiom*i, cioè a dire principj così chiari, che se ne scorge subito l'evidenza, senza poter ragionevolmente formare qualche dubbio sulla loro certezza. Alcune volte vi aggiungono le *Domande*, cioè a dire, domandano, che gli si passi la supposizione d'una cosa tanto facile, che non si possa negargliela. Indi da questi principj, e da queste domande e' deducono le *Proposizioni*, delle quali ne fanno veder la connessione necessaria cogli Affiom*i* per mezzo d'un raziocinio, che si chiama *Dimostrazione*; infine e' traggono da queste proposizioni dimostrate i *Corollarj*, che sono verità, che ne scorrono così naturalmente, che non anno bisogno d'altra prova. Procedere in questo modo trattando una materia, si chiama *seguire il metodo de' Geometri*.

9. Vi sono due sorte di Proposizioni; alcune, che si chiamano *Teoremi*, fanno conoscere le proprietà della grandezza; le altre, che si chiamano *Problemi*, propongono la maniera di ridurre in pratica le verità dimostrate ne' *Teoremi*, o d'inventarne nuove.

10. Per preparare, o per ischiarire una dimostrazione, si fa qualche volta uso della *Costruzione*, de' *Lemmi*, e de' *Scolj*.

11. La *Costruzione* è la disposizione delle parti, che devono servire alla dimostrazione

4
d' un Teorema; ovvero è l'ordine, che bisogna seguire per isciogliere un Problema.

12. Un *Lemma* è una verità, che si dimostra per servire solo alle dimostrazioni delle Proposizioni, che seguono.

13. Uno *Scolio* è bene spesso una osservazione sopra qualche cosa; qualche volta è un'altra dimostrazione della stessa proposizione; qualche volta è un riassunto generale di qualche teoria, che s'è spiegata a lungo.

Principali Afferzioni.

14. I. Il tutto è più grande della sua parte.

15. II. Il tutto è uguale a tutte le sue parti prese insieme.

16. III. Le quantità, ciascuna delle quali è uguale ad una stessa quantità, sono uguali fra loro.

17. IV. Le quantità uguali fra loro, se ricevono aumenti, o soffrono diminuzioni uguali, restano sempre uguali.

18. V. Le quantità, ch' essendo dapprima uguali fra loro, anno aumenti, o diminuzioni disuguali, divengono disuguali fra loro.

19. VI. Le quantità, ch' essendo disuguali fra loro, ricevono aumenti, o diminuzioni uguali, restano sempre disuguali.

PARTE PRIMA.

DELL' ARIMMETICA.

*Della natura de' Numeri , loro formazione ,
e valore .*

20. **U**Na quantità espressa per Numeri è una quantità, che si concepisce divisa in molte parti uguali; una di queste parti considerata sola si chiama l'Unità. Un numero dunque è un ammasso d'unità; così, se ad una unità se ne aggiugne un'altra, la loro somma formerà il numero *due*, se se ne aggiugne anche un'altra, si avrà il numero *tre*, e così degli altri.

21. L'Estensione è realmente composta d'una infinità di parti uguali. Non si può dunque esprimere per un numero finito, se almeno non si suppongano tutte queste parti scompartite in tanti mucchj finiti uguali; un numero, ch'esprime una estensione, esprime in quanti mucchj uguali si concepiscono divise le sue parti; e uno di questi mucchj è quella, che si chiama què l'unità. Non è dunque l'unità un'indivisibile: ella stessa è anche composta di parti, ed è numero riguardo a quelle. Di què traggono origine le frazioni.

22. Per esprimere ogni sorta di numero, ci serviamo di questi dieci caratteri, o cifre.

A 3

Zc.

Zero	0	Cinque	5
Uno	1	Sei	6
Due	2	Sette	7
Tre	3	Otto	8
Quattro	4	Nove	9

Di modo che per significar *dieci*, si scrive 10, che esprime una decina, * cioè nove con una unità *; per notare *undici* si scrive 11, cioè a dire una decina con una unità; per notare *do-dici*, si scrive 12, cioè una decina con due unità ec.; per notare *cento* si scrive 100, cioè una decina di decine; per notare *cento e uno*, si scrive 101, cioè una decina di decine con una unità ec.

23. Si vede dunque, che le cifre, essendo sole, non vagliono più di quello ch'è espresso nella tavola precedente; ma che, quando sono parecchie disposte una accanto all' altra sopra una stessa linea, prendono differenti valori secondo il luogo, che occupano. Si contano questi luoghi da destra a sinistra, e ciascuna cifra esprime decine riguardo a quella, che gli sta sulla destra. Così i valori successivi de' numeri seguono quest' ordine. Numero semplice, 0 unità, decina, centinajo, migliajo, decina di migliaja, centinajo di migliaja, milione, decina di milioni, centinajo di milioni, migliaja di milioni, decina di migliaja di milioni, centinajo di migliaja di milioni, bilione, decina di bilioni, centinajo di bilioni, migliajo di bilioni, decina di migliaja di bilioni, centinajo di migliaja di bilioni, trilione ec.

24. Per enunciare il valore d' un numero
scrit-

scritto, per esempio, di 2639, bisogna notare, che il carattere 9 ch'è il primo a destra, è un numero semplice di nove unità; che il carattere seguente 3, nota 3 decine, o trenta; che il seguente 6, nota 6 centinaia, o seicento; che infine l'ultimo 2, nota due mila; e riassumendone i valori per ordine rovescio, si vede, che questo numero 2639, vale due mila seicento trenta nove (a).

25 * E così 347563 vale trecento quarantasette mila cinquecento sessanta tre.

503020 vale cinquecento tremila e venti.

003860 vale tremila ottocento sessanta.

Nel che, cioè nel profferir sei cifre, bisogna bene esercitarsi.

Se poi siano moltissime note da pronunciarsi. Distribuite il numero dato in tante classi per mezzo di virgole, ognuna delle quali classi sia composta di sei cifre; poi segnate 1 sopra la prima cifra a destra della seconda classe; segnate 2 sopra la prima cifra della terza classe; 3 sopra la prima cifra della quarta classe, e così delle altre: profferite il valore di ognuna di queste classi, come se fusse sola, e poi aggiungetevi la voce o di milione, o di bilione, o di trilione ec., secondo che vi sarà 0 1, o 2,

A 4

o 3

(a) Si usa la cifra 0, o per significare assolutamente il niente, e ciò quando non segue, o precede alcun numero; ovvero per occupare un luogo vuoto, acciò le decine tengano il luogo del loro valore. Così per esprimere dieci, o una decina, si scrive 10; e ciò perchè 1 sia al secondo luogo, ove significa una decina. Per esprimere due cento e sette, si scrive 207, affinchè mettendo 0 tra 2, e 7, si conosca, che 2 è nel luogo delle centinaia.

o 3 ec., sopra l'ultima sua cifra a destra.

Così il numero $2\overset{3}{6}34\overset{2}{2}56981090500000$

Si nota $2,634256,981090,500000$, e si prof-
ferisce due triloni seicento trenta quattro mila
duecento cinquanta sei bilioni, novecento ottantu-
no mila e novanta milioni, e cinquecento mila.*

26. Per esprimere co' numeri una grandez-
za data, come sessanta tre mila quattrocento e tre;
si deve notare, che questo numero è composto di
sei decine di migliaia; di *tre* migliaia, di *quattro*
centinaja, di *zero* di decine, e di *tre* unità. Bi-
sogna dunque prima scriver 6 per le sei de-
cine di migliaia, poi a destra 3 per le tre mi-
gliaja, indi 4 per le centinaja, o per le deci-
ne, infine 3 per l'unità. L'espressione cercata
è dunque 63403.

27. Io chiamerò in appresso *Numero sempli-
ce*, o semplicemente *unità* tutti i numeri mi-
nori di dieci, cioè da 1 a 9 inclusivamente;
e *Numeri composti* tutti quelli, che s' esprimo-
no per più cifre da 10 fino all' infinito.

Delle Operazioni dell' Arimmetica.

28. **P**Oichè i Matematici non considerano
la quantità, che in quanto può ri-
cevere aumento, o diminuzione, segue, che
*si posson fare due sorte d' operazioni su de' nu-
meri; l' una, per la quale si aumenta una, o
più quantità date, ciò, che si chiama fare un'
Addizione; l' altra, per la quale si diminuisce
una grandezza data d' una certa quantità; ciò,
che si chiama Sottrazione.*

Quan-

Quando si ha da operare sopra i numeri semplici non v'è bisogno di Regole, poichè noi combiniamo i numeri facilissimamente; ma quando si hanno numeri composti, bisogna ricorrere alle Regole, che non sono altra cosa, che l'arte di far per parti ciò, che noi non possiamo fare tutto in una volta, a causa della piccola estensione della nostra mente.

Delle Regole dell' Addizione.

29. **L'** Addizione serve a comporre un tutto di più grandezze date, e questo tutto si chiama *Somma*, o *Totale*.

30. I. Se le grandezze date sono numeri semplici, non si ha bisogno di Regola per averne la somma; così è chiaro, e si fa di subito, che la somma di 2 aggiunt' a 2 è 4; ciò, che s'esprime così per abbreviare $2 + 2 = 4$ (questo segno $+$ significa più * cioè, che la quantità, a cui si prefigge, deve unirsi colla quantità, che precede *; questo segno $=$ significa uguale, * cioè, che le quantità poste a destra di questo segno sono uguali alle quantità poste a sinistra *). Si fa similmente, che 3, 6, e 8 aggiunti insieme fan 17, ovvero che $3 + 6 + 8 = 17$.

31. II. Se le grandezze date sono numeri composti, come, se si dimandasse la somma di queste grandezze 432, e 363, ecco la regola, che bisogna seguire. *Scrivete queste grandezze, una sotto l'altra, di maniera che le unità s'iano sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaia sotto le centinaia in colonna; tirate una linea orizzontale al di sotto; e andando da destra a sinistra.*

nistra, prendete la somma delle unità, indi quella delle decine, e poi quella delle centinaia &c. scrivete queste somme successivamente al di sotto della linea orizzontale nelle colonne corrispondenti. Così nella prima colonna io dico $2 + 3 = 5$, io scrivo 5 al di sotto; nella seconda $3 + 6 = 9$, io pongo 9; nella terza $4 + 3 = 7$, io scrivo 7, ed ho la somma cercata 795.

La ragione di questa operazione nasce dall' Axioma II., Che il tutto è uguale a tutte le sue parti prese insieme.

32. OSSERVAZIONI. I. Quando la somma di una di queste colonne sorpassa 9, cioè a dire, quando ella è composta di decine, e d'unità; bisogna scrivere solamente le unità sotto della colonna, ed aggiungere alla colonna seguente un numero uguale a quello delle decine.

Gli esempj seguenti porranno la cosa in chiaro.

Fia d'uopo aggiugnere insieme questi tre numeri 6078, 0198, 483, io gli scrivo in colonne secondo la regola, e dico $8 + 8 = 16$, $+ 3 = 19$; cioè a dire, la somma della prima colonna è 19, o 1 decina, e 9 unità; io scrivo solamente 9 nella colonna delle unità, e terrò conto della decina nella somma della colonna seguente. Io dico dunque $1 + 7 = 8$, $+ 9 = 17$, $+ 8 = 25$; per lo stesso metodo io non iscrivo, che 5 sotto la seconda colonna, e ritengo le due decine per la colonna seguente. Io dico dunque $2 + 0 = 2$, $+ 1 = 3$, $+ 4 = 7$, pongo 7; in fine io dico $6 + 0 = 6$, e, poichè

chè questa è l'ultima colonna, io scrivo 15 distelo. Così la somma cercata è 15759.

Ecco altri esempj.

		147	40000
		45	59697
	101740	312	190
4950	270	56	1009
5050	21909	200	9897
10000	123919	760	110793

33. II. Per conoscere, se non si è fallito nell'Addizione, bisogna ricominciar l'operazione, prendendo la somma delle colonne dal basso all'alto; imperocchè è chiaro, ch'ella dev'essere la stessa, quantunque si sia presa dall'alto al basso.

34. III. Se bisogna aggiungere un numero a se stesso più volte, come 6, 8, 20, o 100 volte, allora ci serviamo d'un'Addizione abbreviata, che si chiama *la Moltiplicazione*: ne parleremo ben tosto.

Della Sottrazione.

35. **L**A sottrazione serve a diminuire una grandezza data d'una quantità anche data: serve a conoscere di quanto una grandezza è più grande, o più piccola d'un'altra; qual'è l'*eccello* della più grande sopra la più piccola, o qual'è la *differenza* fra le due grandezze.

36. La Sottrazione è facile ne' numeri semplici. Si vede facilmente, che *se si toglie 2 da 5, resta 3*, e così 3 è l'*eccello* di 5 sopra 2,
o la

o la differenza, che passa tra 2, e 5. Questa operazione in accorcio s' esprime così $5 - 2 = 3$ (questo segno $-$ dinota meno, * cioè, che la quantità a cui si prefigge debba togliersi dalla quantità, che precede. *) Similmente $9 - 4 = 5$, $8 - 7 = 1$.

37. Ecco la regola de' numeri composti. Per sottrarre un numero da un altro, bisogna che sia più piccolo; ponete dunque il minore sotto il maggiore, come nell' Addizione; indi scrivete sotto ciascuna colonna successivamente l'eccesso delle unità, decine, centinaja ec. del numero superiore sotto le unità, decine, e centinaja del numero inferiore, ed avrete l'eccesso totale, o la differenza fra questi due numeri.

ESEMPIO. Fia d'uopo da 795 togliere 243, avendogli scritti, come si vede nell'esempio, io dico $5 - 3 = 2$, pongo 2 al di sotto; indi $9 - 4 = 5$, scrivo 5; dipoi $7 - 2 = 5$ e ripongo 5. La differenza, o'l residuo cercato è dunque 552.

38. La ragione è, che avendo tolte da 745 tante unità, tante decine, e tante centinaja, quante ne contiene il numero 243, deve restare un numero d'unità, di decine, e di centinaja uguale all'eccesso di 795 sopra 243.

39. OSSERVAZIONI. I. Quando in una colonna la cifra inferiore sorpassa la superiore, bisogna aggiungere una decina a questa superiore, scrivere al di sotto l'eccesso del superiore, così aumentato, sopra l'inferiore, e per compensar questa decina, bisogna diminuire d' un unità la cifra superiore, che gli sta a sinistra.

ESEMPIO. S'abbia da togliere 38 da 64 avendola

dogli scritti secondo la Regola, io dico
 $4-8$ non si può, ma $14-8=6$; 64
 scrivo 6 al di sotto nella sua colonna: 38
 ed a causa della decina aggiunta a 4,
 in vece di dire nella seconda colonna 26
 secondo l'ordinario, $6-3$, dico $5-3=2$, e
 pongo due, ed ho per differenza 26.

ALTRI ESEMPI.

6222	50000	56078	489249
3475	30002	1003	299999
2747	19998	55075	189250

* Nel primo di essi io dico $2-5$ non si può; ma bensì $12-5=7$, scrivo 7 al disotto; indi $1-7$ non si può, ma $11-7=4$, che scrivo sotto; poi $11-4=7$, che anche sottoscrivo; e infine $5-3=2$. Dove si vede, che il primo numero 2, prendendo una decina dal secondo, fa 12: il secondo, prendendola dal terzo, farebbe 12, ma, per l'unità prestata al primo, fa 11: e per la stessa ragione il terzo fa anche 11, e'l quarto fa 5.

Nel secondo esempio la prima cifra fa 10, le altre fanno 9, e l'ultima cifra 5 fa 4.*

40. II. *Per veder se la sottrazione è ben fatta, bisogna aggiunger l'eccesso trovato al numero minore; imperocchè egli è chiaro, che la somma dev'essere uguale al maggiore.*

41. Se da un numero dato bisogna toglierne un'altro più volte, per esempio 6, 20, 100 volte cc. per sapere quante volte il maggiore eccede il minore, allora ci serviamo d'una sot-

tra.

Delle altre Operazioni dell' Arimmetica.

Quantunque secondo l' idea, che s' è data dell' Arimmetica (28), ella non consista, che in due operazioni; pur contuttociò, poichè vi sono de' casi (indicati n. 34 e 41) dove queste operazioni farebbono troppo lunghe, si sono inventate le regole, che seguono.

Della Moltiplicazione.

42. Ci serviam della moltiplicazione per trovar senza molto calcolo la somma d'un numero, che bisogna più volte aggiungere a se stesso; così, se si vorrebbe la somma di 12 aggiunto 9 volte, bisognerebbe (31) fare una colonna di nove 12, e prenderne la somma 108; colla Moltiplicazione si trova seguitamente questa stessa somma 108.

43. In questo esempio 12 si chiama *il moltiplicando*, 9 *il moltiplicatore*, e 108 *il prodotto*, in generale il moltiplicando, e il moltiplicatore si chiamano le *radici* d'un prodotto.

Si vede dunque, che il *prodotto* è la *somma del moltiplicando preso tante volte, quante sono l'unità contenute nel moltiplicatore*; o ciocchè è lo stesso, il *prodotto* contiene tante volte il moltiplicando, quante volte il moltiplicatore contiene l'unità.

44. Ogni moltiplicazione dà dunque questa *proporzione*. L'unità è al moltiplicando, come il moltiplicatore al prodotto.

45. Se in luogo di scriveré nove 12 in colonna, si scrivesse dodici 9, egli è chiaro, che si troverebbe la stessa somma 108; donde segue, che, *quando si devono moltiplicar due numeri, si può indifferenteemente prendere quello, che si vorrà per moltiplicando, e l'altro è il moltiplicatore.*

46. Non v' ha bisogno di regola per la moltiplicazione de' numeri semplici. Si vede da principio, che il prodotto di 2 moltiplicato per 3 è 6, ciò che in accorcio si nota così $2 \times 3 = 6$ (il segno $\times$ significa *moltiplicato per*) * oppur si scrive $2 \cdot 3 = 6$ *: similmente $3 \times 4 = 12$, $7 \times 5 = 35$ ec. Bisogna similmente sapere a memoria il prodotto de' numeri semplici, per praticar facilmente le regole della moltiplicazione. Ecco una tavola del prodotto de' numeri semplici un poco grandi.

$3 \times 3 = 9$		
$3 \times 4 = 12$	$4 \times 4 = 16$	
$3 \times 5 = 15$	$4 \times 5 = 20$	$5 \times 5 = 25$
$3 \times 6 = 18$	$4 \times 6 = 24$	$5 \times 6 = 30$
$3 \times 7 = 21$	$4 \times 7 = 28$	$5 \times 7 = 35$
$3 \times 8 = 24$	$4 \times 8 = 32$	$5 \times 8 = 40$
$3 \times 9 = 27$	$4 \times 9 = 36$	$5 \times 9 = 45$
$7 \times 7 = 49$		
$7 \times 8 = 56$	$8 \times 8 = 64$	
$7 \times 9 = 63$	$8 \times 9 = 72$	$9 \times 9 = 81$

47. Essendo dati due numeri composti, come 32, e 24, per averne il prodotto, *bisogna porre quello, che si è scelto per moltiplicatore* (che
or-

ordinariamente è il più piccolo) sotto il moltiplicando, come nell'Addizione, così io pongo 24 sotto 32; bisogna indi scrivere al di sotto, andando da destra a sinistra, il prodotto di ciascuna cifra del moltiplicando per le unità del moltiplicatore, dicendo, per esempio, $2 \times 4 = 8$, io pongo 8, $3 \times 4 = 12$, io pongo 12; dopo ciò bisogna scrivere ancora da destra a sinistra, cominciando dalla colonna delle decine, il prodotto delle cifre del moltiplicando per le decine del moltiplicatore, dicendo $2 \times 2 = 4$, io pongo 4 sotto del moltiplicatore 2, $3 \times 2 = 6$, pongo 6 a sinistra. Infine bisogna prendere la somma di questi due prodotti, ed ho 768 per prodotto totale.

$$\begin{array}{r}
 32 \\
 24 \\
 \hline
 128 \\
 64 \\
 \hline
 768
 \end{array}$$

48. Per concepir questa operazione si può; facendola, ragionar così; il prodotto di 32 per 24 è evidentemente uguale (43) alle decine, ed alle unità di 32 prese tante volte, quante sono le unità, che entrano in 23, cioè à dire quattro volte, e due decine di volte. Bisogna dunque dir prima, le 2 unità del moltiplicando prese 4 volte producono 8 unità, le quali io scrivo. Indi le 3 decine del moltiplicando prese 4 volte producono 12 decine; io scrivo 12 a sinistra di 8, affinchè stia nel luogo delle decine, e le 2 unità di 32 prese 4 volte producono 128.

Vengo dipoi alle due decine del moltiplicatore, e dico, le due unità del moltiplicando prese due decine di volte producono 4 decine; io scrivo 4 nella seconda colonna andando a sinistra, o, ciò ch'è lo stesso, io scrivo 4 nella

la colonna del suo moltiplicatore; perchè 4 esprime le decine, onde dev'essere nella colonna delle decine. Infine io dico, le 3 decine del moltiplicando prese due decine di volte producono 6 decine di decine, cioè a dire 6 centinaja; io scrivo 6 a sinistra di 4, affinchè si trovi nel luogo delle centinaja. Dunque le 3 decine, e le due unità del moltiplicando, prese due decine di volte producono 64 decine. Bisogna dunque aggiungere questo prodotto a quello, che si è trovato più sopra, per avere il prodotto di tutte le parti del moltiplicando per tutte quelle del moltiplicatore; questo prodotto totale è dunque 768.

ALTRO ESEMPIO. Della Moltiplicazione de' numeri un poco più composti. Si cerchi il prodotto di 564 per 249; avendo disposto questo numero secondo la regola; io moltiplico prima 564 per 9 unità del moltiplicatore, dicendo $4 \times 9 = 36$, pongo 6, e tengo 3; $6 \times 9 = 54$, ma a causa del 3 ritenuto io dico $54 + 3 = 57$, pongo 7, e tengo 5; $5 \times 9 = 45$, $45 + 5 = 50$, io pongo 50 disteso, perchè non v'è altro da moltiplicare per 9.

Vengo dipoi alle 4 decine del moltiplicatore, per le quali io moltiplico 564, dicendo $4 \times 4 = 16$, pongo 6 al luogo delle decine, e tengo 1; $6 \times 3 = 24$, $+ 1 = 25$, pongo 5, e tengo 2; $5 \times 4 = 20$, $+ 2 = 22$, scrivo 22.

Infine io moltiplico 564 per le 2 centinaja

B

del

$$\begin{array}{r}
 564 \\
 249 \\
 \hline
 5076 \\
 2256 \\
 1128 \\
 \hline
 140436
 \end{array}$$

del moltiplicatore, dicendo $4 \times 2 = 8$, pongo 8 nel luogo delle centinaja; $6 \times 2 = 12$, pongo 2, e tengo 1; $5 \times 2 = 10$, $+ 1 = 11$, pongo 11.

Prendo la somma di questi prodotti parziali, ed ho 140436 per prodotto totale.

49. OSSERVAZIONI I. Quando vi sono uno, o più zeri alla fine d'uno, o di tutti e due i numeri dati si abbrevia molto l'operazione, moltiplicando solamente le cifre, e ponendo dopo il loro prodotto quanti zeri vi sono alla fine de' dati numeri. Per esempio, per moltiplicare 406000 per 10700, si moltiplica solamente 406 per 107, e si aggiungono cinque 0 al prodotto 43442, e il prodotto totale è 4344200000. La ragione si renderà evidente a quegli, che avendo fatta l'operazione distesamente, vedrà quanti 0 vi sono inutili.

Ecco alcuni esempj di moltiplicazione.

466	1000000	65464
1002	1000	4053
932	1000000000	196392
466		327320
		261856
466932		
		265325592

50. II. Per conoscere, se non si è fatto errore nella moltiplicazione, bisogna cangiare l'ordine de' numeri dati, cioè a dire, del moltiplicatore farne il moltiplicando, e reciprocamente.

mente: imperocchè sempre si deve trovare uno stesso prodotto (45) (a).

Della Divisione.

51. **L**A Divisione è una Sottrazione abbreviata, con la quale si toglie una grandezza da un'altra quante volte è possibile, per sapere, quante volte ella vi è contenuta. Così per sapere quante volte 12 contiene 4, la maniera la più naturale è di togliere 4 da 12, e resta 8, indi di togliere 4 da 8, e resta 4, infine di togliere 4 da 4, e resta 0: donde si vede che la quantità 12 svanisce, dopo che 4 se ne toglie 3 volte, e così 12 contiene 4 precisamente 3 volte. Ma questo metodo sarebbe troppo lungo, se i numeri fossero molto grandi. La divisione è dunque l'abbreviazione, di cui ci serviamo per trovare in poco tempo quante volte una quantità (che allora si chiama il *dividendo*) contiene un'altra quantità, (che si chiama il *divisore*). Così ancora si chiama *quoziente* il numero, ch'esprime quante volte il dividendo contiene il divisore. In questo esempio, 12 è il dividendo, 4 il divisore, e 3 il quoziente.

52. Segue chiaramente da queste nozioni.

I. Che il *dividendo* contiene tante volte il *divisore*, quante volte il *quoziente* contiene l'*unità*.

B 2

Impe-

(a) L'uso più comune però è di provare la Moltiplicazione per mezzo della Divisione, operando così: il prodotto della Moltiplicazione si divide per uno de' fattori; e se per quoziente s'avrà l'altro de' fattori senza resto alcuno, l'operazione sarà stata eseguita senza errori. Questa si potrà usare dopo aver ben capito l'articolo, che segue.

Imperocchè il quoziente esprime il numero di ciascuna delle sottrazioni, che bisogna fare perchè svanisca il dividendo.

53. *E per conseguenza si ha sempre l'unità al quoziente, come il divisore al dividendo.*

54. II. Che il divisore preso tante volte, quante sono le unità contenute nel quoziente, dev'essere uguale al dividendo (imperocchè allora non si fa altro, che ripigliare il divisore tante volte, quante è stato tolto, ciò che deve restituire il dividendo,) ovvero, ciò ch'è la stessa cosa, *il prodotto del divisore pel quoziente è uguale al dividendo.*

55. Dunque 1°. *per esaminare se un quoziente è esatto, bisogna moltiplicarlo pel divisore, e compararne il prodotto al dividendo.* Imperocchè se il prodotto è più grande, il quoziente è troppo grande, e reciprocamente.

56. Si può riguardare il dividendo come il prodotto d'una moltiplicazione, della quale il divisore, e 'l quoziente sono le radici. Così dividere il dividendo pel divisore, per averne un quoziente, non è altro, che dividere un prodotto per una delle sue radici per trovare l'altra radice. Dunque 2°. *Quando si conosce un prodotto, ed una radice di questo prodotto, per trovarne l'altra radice, bisogna dividere questo prodotto per la radice trovata.*

57. III. Per mezzo dell'operazione precedente, 12 si trova diviso in tre parti uguali ciascuna delle quali è 4, ovvero in 4 parti uguali, ciascuna delle quali è 3. Dunque *per dividere una quantità in quante si vogliano parti ugua-*

uguali, bisogna dividerla per questo numero di parti, e'l quoziente esprime quanto grande è ciascuna di queste parti.

58. I. CASO. Quando il dividendo, e'l divisore sono numeri semplici, si conosce il quoziente senza operazione. Per esempio, si sa che 8 contiene 4 precisamente due volte, o che il quoziente di 8 diviso per 4 è 2. In fatti $2 \times 4 = 8$. Per abbreviare ci serviamo di questa espressione $\frac{8}{4} = 2$. Si scrive il divisore immediatamente sotto del dividendo, e si separano per mezzo d'una linea orizontale, che significa *diviso per*. (Alcuni Autori scrivono così $8 : 4 = 2$). Similmente $\frac{9}{3} = 3$, poichè $3 \times 3 = 9$. E $\frac{6}{2} = 3$, perchè $3 \times 2 = 6$.

59. Quando non si trova un quoziente esatto, come, se si volesse dividere 9 per 4, dove si vede, che 9 contiene 4 più di due volte, ma meno di 3, onde il quoziente vero è fra 2 e 3: allora si scrive il più piccolo de' due numeri, tra' quali il vero quoziente deve trovarsi, si moltiplica questo numero pel divisore; si toglie dal dividendo il prodotto di questa moltiplicazione, e si ha un resto, che si scrive a lato del quoziente, mettendo il divisore al di sotto di questo resto, dal quale si separa per mezzo d'una linea orizontale. Per esempio, bisogna dire 9 contiene 4 due volte, e più, ma non già tre volte: io scrivo dunque 2 per quoziente; io fo $2 \times 4 = 8$; indi $9 - 8 = 1$, ed ho $\frac{9}{4} = 2 \frac{1}{4}$, il che significa, che 9 diviso per 4 ha 2 per quoziente, e che resta ancora una delle unità di

9 da dividersi in 4 parti uguali . Similmente $\frac{7}{2} = 3 \frac{1}{2}$, $\frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}$, $\frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5}$.

60. OSSERVAZIONI. I. La divisione consiste dunque in tre operazioni . 1°. Si divide il dividendo pel divisore per avere un quoziente . 2°. Si moltiplica il divisore pel quoziente per avere un prodotto . 3°. Si toglie questo prodotto dal dividendo per avere un resto .

61. II. Se il divisore è maggiore del dividendo , come , se bisognasse dividere 4 per 7 , allora basta scrivere $\frac{4}{7}$ come un resto di divisione , e questa espressione rappresenta il quoziente .

62. Queste sorti di quozienti , o questi resti di divisione , o similmente in generale ogni espressione , che indica una divisione , per una linea , che separa due quantità scritte l' una sotto dell' altra , si chiamano *frazioni* , o *numeri rotti* . E per l' opposto si chiamano *interi* , o *numeri interi* , i numeri , o l' espressioni , che sono senza questa linea .

63. III. Una quantità ; che può dividersi esattamente , e senza resto per un numero , chiamasi un *multiplo* di questo numero , perchè ella è uguale al prodotto di questo numero pel quoziente della divisione . Così 8 è un multiplo di 4 e di 2 : e ogni numero è multiplo dell' unità : ma 8 non è un multiplo di 7 , nè di 6 , nè di 5 , nè di 3 . Similmente 11 non è multiplo d'alcun numero intero maggiore di 1 .

64. IV. La quantità , della quale un' altra è multiplo , dicesi *aliquota* , o parte aliquota di questo numero , così 4 , e 2 sono le aliquote di 8 .

65. V.

65. V. Ogni numero intero , che non è multiplo d'alcun'altro numero intero maggiore dell'unità si chiama numero *primo*. Si trovano in differenti Autori ampie tavole di tutti questi numeri. Ecco quelli , che sono minori di 100.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

66. II. CASO. *Se il dividendo, e 'l divisore sono numeri composti.* Per esempio, se bisogna dividere 147475 per 362. Io considero prima in quante prime cifre del dividendo, che son sulla sinistra (poichè la divisione si fa sempre da sinistra a destra) il divisore può essere contenuto: e poichè 362 non possono essere contenute nelle tre prime cifre del dividendo 147, ma bensì nelle quattro prime cifre 1474 io le separo dalle due altre cifre 75, per mezzo d'un punto, scrivo il divisore 362 al di sotto di 1474, e 'l primo membro della divisione consiste in dividere 1474 per 362. Poichè questa divisione non si può fare tutta in una volta, io divido solamente le centinaja di 1474 per le centinaja di 362, dicendo quante volte in 14 entra il 3? 4 volte, e più (a); io pongo solamente 4 al quoziente, moltiplico il divisore 362 per

B 4

4.

(a) Si soggiunga così: questo numero 2 si metta a lato del 7, che segue, s'avrà 27: poi si veda, se il 6, del divisore entra anche 4 volte nel 27, e così di ciascun'altro numero del divisore se entri egual numero di volte nel corrispondente nel dividendo; perchè altrimenti si dovrebbe far entrare meno, cioè 3 volte; indi si prosegua, come sopra.

4, e ne tolgo il prodotto 1448 dal dividendo 1474, restano 26, e la prima parte della divisione è fatta.

Io abbasso a lato del
 resto 26 la prima cifra
 7, che aveva separata;
 e'l secondo membro della
 divisione consiste a divide-
 re 267 per 462: io di-
 vido similmente le centi-
 naj di 267 per quelle
 di 362, dicendo in 2
 quante volte entra il 3?
 Non v'entra nemmeno
 una volta; io pongo 0 al
 quoziente multiplico 362
 per 0, e tolgo il prodot-
 to, che è ancora 0 dal
 dividendo 267, restano
 267

147475

= 407 $\frac{144}{362}$

362

1448

267

362

0

2675

362

2534

141

267, e la seconda parte è finita.

Abbasso a lato di questo residuo la seconda
 cifra 5, che io aveva separata, e'l terzo membro
 della divisione consiste a dividere 2675 per 362.
 Io dico dunque in 26 quante volte entra il
 3? 8 volte; multiplico 362 per 8, e trovo
 il prodotto 2896, il quale, essendo più gran-
 de che il dividendo 2675, mi fa conoscere,
 che il quoziente 8, che io ho trovato, è
 troppo grande. Lo lascio, e pongo 7 in suo
 luogo (not. pag. 23). Multiplico 362 per 7,
 tolgo il prodotto 2534 da 2675, restano 141.
 E poichè non vi sono più cifre da abbassare,
 tut-

tutta la division è fatta: e il quoziente cercato è 407, e restano 141, che io pongo a fianco in frazione.

67. *La prova dell' esattezza di queste operazioni si fa aggiungendo in una somma i prodotti delle moltiplicazioni, e 'l residuo, secondo l'ordine nel quale si trovano.* In questo esempio i prodotti sono 1448, 0, 2534, e 'l resto è 141, tolgo tutte le altre cifre, eccetto queste quì, che io aggiungo insieme tali quali si trovano disposte nella figura; e trovo la loro somma 147475 uguale al dividendo proposto. Conchiudo adunque, che la divisione è ben fatta: giacchè, se questa somma non si trovasse uguale al dividendo farebbe una nota infallibile d' errore. Imperocchè la somma de' prodotti di ciascuna cifra del quoziente pel divisore è uguale al prodotto del quoziente intero pel divisore intero: e 'l prodotto (54) del divisore pel quoziente deve essere uguale al dividendo (a).

68. OSSERVAZIONI. 1°. Sempre per la prima cifra (ch' è a sinistra) del divisore si fa la divisione di ciascun membro. Così, se questa prima cifra è seguita da due altre, bisogna trascurare le due ultime cifre a destra del dividendo di questo membro, e dividere le altre per la prima cifra del divisore. Se que-

(a) La prova più comune dell' esattezza della divisione si fa per mezzo della Moltiplicazione così: Si moltiplichi il quoziente per lo divisore; e al prodotto s' aggiunga il resto della divisione, se ce n' è; l' operazione sarà esatta, se si restituisca perfettamente il dividendo. La ragione è chiara dalle cose dette di sopra.

questa prima cifra è seguita da 3 , da 4 altre ec., bisogna trascurare le 3 , le 4 ec. ultime cifre a destra del dividendo, e dividere quelle, che restano a sinistra per la prima cifra del divisore .

69. 2°. Operando sopra un membro , si trova sovente un quoziente troppo grande , e ciò accade principalmente , quando la cifra , che sta dopo la prima cifra del divisore , è un poco grande , come 6 , 7 , 8 , 9 .

70. 3°. Quando , avendo abbassata una cifra, si vede , che il membro che ne risulta è più piccolo del divisore , si può , per abbreviare , mettere da principio 0 al quoziente , ed abbassare la cifra, che segue , che darà un nuovo membro .

71. 4°. Per abbreviare ancora non si scrive il divisore in ciascun membro , servendosi di quello , che è scritto sotto il dividendo : ma bisogna guardare esattamente l'ordine delle colonne delle cifre . Secondo questo compendio l'esempio precedente prenderà , la forma che segue .

$$\begin{array}{r}
 147475 \quad | \quad 362 \\
 \hline
 1448 \quad \quad \quad 407 \frac{242}{162} \\
 \hline
 2675 \\
 2534 \\
 \hline
 141
 \end{array}$$

Ecc.

Ecco altri Esempj; nel primo si propone da dividere 473645 per 1002, nel secondo 200000 per 191, e nel terzo 790758 per 394.

473645	1002	200000	191
4008	472 $\frac{705}{1002}$		1047 $\frac{23}{191}$
7284			
7014			
2705			
2004			
701			
		191	
		900	
		764	
		1360	
		1337	
		23	
	790758	394	
		2007	
	788		
	2758		
	2758		
	0		

72. 5°. Quando il divisore è terminato da zeri si abbrevia l'operazione, separando dalla fine del dividendo tante cifre, quanti sono i 0 alla fine del divisore; si dividono indi le altre per le altre cifre del divisore: si congiunge il resto della divisione, se ve n'ha, a sinistra delle cifre, che si sono separate, e se ne fa una frazione: Per esempio, avendo
a di-

a dividere 238873 per 3600 , io divido 2388 per 36 , trovo il quoziente 66 , e 'l resto 12 : io dico dunque , che il quoziente cercato è $66 \frac{12}{36}$.

Il quoziente di 324755 diviso per 300 è 1082 $\frac{155}{300}$. Il quoziente di 843554 diviso per 1000 è 843 $\frac{554}{1000}$.

73. 6°. Infine , quando il dividendo , e 'l divisore sono terminati da zeri , si può assolutamente togliere lo stesso numero di zeri dall' uno , e l' altro , e fare il resto della divisione secondo le regole , e le osservazioni precedenti. Così avendo a dividere 417000 per 2500 , io divido solamente 4170 per 25 , e 'l quoziente è $166 \frac{20}{25}$. Per dividere 43495000 per 2850000 , io divido solamente 43495 per 2850 , ed ho $15 \frac{745}{2850}$. Similmente il quoziente di 100000 diviso per 1700 è $58 \frac{14}{17}$.

RIFLESSIONE . Quando uno si avrà rese famigliari le operazioni , e le osservazioni precedenti , facendovi attenzione , apprenderà facilmente , che elleno si riducono tutte alle operazioni dell'articolo 59 , un poco più complicate . L' intelligenza dell'ultima regola dipende ancora dalla conoscenza delle frazioni decimali , delle quali si parlerà in appresso.

DELLE FRAZIONI.

Della Natura delle Frazioni in generale, loro valore, e comparazione.

74. **A** Bbiamo veduto, che le frazioni sono (62) quantità divise per quantità maggiori, e sono ordinariamente gli avanzi delle divisioni. Per formarfene un'idea chiara, bisogna rammentarsi, che ogni numero (20) esprime quante parti uguali contiene una quantità, ciascuna delle quali è chiamata una unità; in tanto non v'è unità, cioè non v'è parte alcuna determinata della quantità, che non possa concepirsi anch'essa divisa in un certo numero di parti uguali più piccole; ciascuna, o pure qualcheduna di queste parti uguali formano una porzione, o una frazione di questa unità.

Per esempio, il numero di 100 piedi è composto d'una certa quantità determinata, la cui lunghezza s'è chiamata un piede, e la qual'è stata presa cento volte: il piede dunque è unità in confronto del numero 100; ma perchè il piede ancora si divide in 12 pollici, ciascun pollice è la dodicesima parte d'un piede; di sorte che misurando uno spazio, forse non si troverà giusto di 100 piedi, ma vi farà un pollice, o due di più, o di meno; in tal caso, questo pollice, o questi due

due pollici sono le frazioni d'un piede, e s'esprimono così; $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, ec., cioè una dodicesima, due dodicesime d'un piede.

* E per meglio comprendere l'origine delle frazioni bisogna rammentarsi (n. 21.), che siccome l'unità aggiunta a se stessa più volte produce i numeri interi, così divisa più volte produce i rotti; onde siccome i numeri sono multipli dell'unità, così l'unità è multipla de' rotti, e se per esempio, 2, 3, 5 ec. sono dupli, tripli, quadrupli dell'unità, l'unità stessa poi è dupla, tripla, quadrupla ec. di $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ ec.

Dipoi, se le frazioni hanno uno stesso denominatore, si può operare sopra di esse, come sopra numeri interi, operando co' loro numeratori.

Così $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$ come $2 + 5 = 7$:
e $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8}$, come $5 - 3 = 2$: di più
 $\frac{3}{8} \times 5 = \frac{15}{8}$, come $3 \times 5 = 15$, in-
fine $\frac{6}{8} : 2 = \frac{3}{8}$, come $6 : 2 = 3$.

Non è l'istesso operando co' denominatori, perchè, se cresce il denominatore, la frazione manca, ed all'incontro se il denominatore manca, la frazione cresce, così $\frac{1}{8}$ è maggiore di $\frac{1}{8+2}$ cioè di $\frac{1}{10}$, ed è minore di $\frac{1}{8-2}$, cioè $\frac{1}{6}$: anzi se moltiplichiamo il denominatore per 2, per 3, per 4, la frazione diventa la metà, la terza, la quarta parte di quello, che era; e se lo dividiamo per 2, per 3, o per 4, la frazione diventa dupla, tripla, quadrupla. Così $\frac{1}{8}$ è dupla di $\frac{1}{16}$, è tripla di $\frac{1}{24}$, è quadrupla di $\frac{1}{32}$.

$\frac{1}{4}$; ed all'incontro $\frac{1}{2}$, è la metà di $\frac{1}{2}$, la terza parte di $\frac{1}{3}$, la quarta parte di $\frac{1}{4}$. 31

COROLLARIO. Una frazione si moltiplica, se o si moltiplichi il numeratore, o si divida il denominatore: e si divide, se o si divida il numeratore, o si moltiplichi il denominatore.

Imperocchè si prenda la frazione $\frac{2}{2} = 1$. In essa 1° . se si moltiplichi il numeratore per 2 si avrà $\frac{2 \times 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$; e 2° . se si divida il de-

nominatore per 2 si avrà $\frac{2}{2:2} = \frac{2}{1} = 2$; ma 2 è duplo di 1, dunque e moltiplicando il numeratore, e dividendo il denominatore per 2, si è avuta una frazione doppia della prima: ma facendo contrarie operazioni si hanno contrarij risultati, dunque se dividiamo il numeratore della frazione per 2, e se ne moltiplichiamo il denominatore, avremo una frazione, che sarà la metà della prima. E facendo le stesse operazioni per 3, per 4 ec. si avranno frazioni duple, triple, oppure le terze, le quarte parti ec. Dunque ec.*

75. Dunque in generale, l'unità supponendosi divisa in un certo numero di parti uguali, la frazione esprime quante di queste parti si sono prese; così la frazione $\frac{1}{3}$ significa, che l'unità, essendo divisa in tre parti uguali, se n'è presa 1: la frazione $\frac{4}{5}$ esprime, che l'unità, essendo divisa in cinque parti uguali, se ne sono prese 4.

Il numero, o termine superiore si chiama il *numeratore* della frazione, e l'inferiore si chiama *denominatore*.

ma il *denominatore*; così nella frazione $\frac{4}{5}$, 4 è il numeratore, 5 è il denominatore.

76. Una frazione propriamente detta è una quantità minore dell'unità, perchè il suo numeratore è più piccolo del suo denominatore. Accade però sovente, che s'incontrano espressioni in forma di frazioni, il cui numeratore è uguale, o anche più grande del suo denominatore. Intanto, quando il numeratore è uguale al denominatore, la frazione è uguale all'unità; imperocchè $\frac{4}{4}$ significando, che d'una unità divisa in 4 parti uguali, se ne sono prese tutte e quattro, egli è chiaro, che si è presa l'unità intera, e che così $\frac{4}{4} = 1$. E quando il numeratore sorpassa il denominatore, la frazione sorpassa l'unità: così $\frac{12}{4} = 3$ (58).

77. Non si può distinguere qual'è la più grande di due frazioni, se almeno non abbiano o l'istesso numeratore, o l'istesso denominatore; così non si vede subito qual'è la più grande di queste due frazioni $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{7}$. Ma 1°. Se hanno uno stesso numeratore, quella che ha un più piccolo denominatore, è la più grande: onde è chiaro, che la frazione $\frac{3}{2}$ è maggiore di $\frac{3}{4}$; la frazione $\frac{3}{2}$ è maggiore di $\frac{3}{7}$ ec. 2°. Se due frazioni hanno lo stesso denominatore, allora la più grande è quella, che ha il più gran numeratore. Onde è chiaro, che $\frac{2}{3}$ son più di $\frac{1}{3}$, che la frazione $\frac{2}{4}$ è maggiore di $\frac{1}{4}$.

I valori delle frazioni, che hanno uno stesso numeratore, sono fra loro reciprocamente come i denominatori, e quelle, che hanno uno stesso denominatore, so-

sono direttamente come i loro numeratori. * ³³ E in generale le frazioni sono fra loro in ragion composta della diretta de' numeratori, e dell'inversa de' denominatori. *

78. Il valore della frazione non iscambiafi, o si moltiplicano, o si dividano i suoi due termini per una stessa quantità. Così egli è evidente, che colui, che ha $\frac{1}{2}$, ha tanto, quanto quello, che ne ha $\frac{2}{4}$, o quello, che ne ha $\frac{3}{6}$, o $\frac{4}{8}$ ec. Frattanto $\frac{3}{4} = \frac{1 \times 3}{2 \times 2}$, $\frac{3}{8} = \frac{1 \times 3}{2 \times 4}$, $\frac{4}{8} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4}$ ec.

Similmente colui, che ha $\frac{4}{8}$ non ha più di quell'altro, che ne ha $\frac{2}{4}$, o $\frac{3}{6}$, o $\frac{1}{2}$ ec. Se dunque si dividano i due termini della frazione $\frac{4}{8}$ per 2, o per 3, o per 4, si hanno frazioni dello stesso valore di $\frac{2}{4}$ *. Ovvero si può dir così; moltiplicando i termini di $\frac{1}{2}$ per 2, da una parte viene a duplicarsi, con moltiplicarne il numeratore, dall'altra parte viene a farsi la metà con moltiplicarne il denominatore (cor. n. 74) e perciò la frazione resta dello stesso valore, perchè quanto cresce per una via, tanto manca per l'altra: e l'istesso direbbesi per la divisione de' suoi termini *.

Si troverà una dimostrazione generale di questa proprietà nell'articolo delle ragioni geometriche (296).

Quindi segue, che vi sono infinite frazioni dello stesso valore, ma espresse con termini differenti.

Delle Operazioni Arimmetiche , che si posson fare sulle Frazioni in generale .

LE Operazioni Arimmetiche , che si posson fare sulle Frazioni sono di due maniere ; alcune si chiamano *Riduzioni* , le altre sono le quattro Regole ordinarie .

Delle Riduzioni delle Frazioni .

79. Le Riduzioni delle Frazioni sono differenti trasformazioni , che se gli fan prendere senza cangiarne il valore , per rendere le altre operazioni più comode .

80. I. *Per ridurre gl' interi in frazioni .*

1°. Si può ridurre in generale ogni numero in forma di frazione , mettendogli 1 per denominatore ; di questo modo 6 posto in forma di Frazione è $\frac{6}{1}$ (a).

2°. Per ridurre un numero intero in una frazione , che abbia un qualunque denominatore , si moltiplica il numero intero per lo denominatore , che s'è scelto , il prodotto è il numeratore della frazione ; il perchè per ridurre 6 a una frazione , il cui denominatore sia 7 , si ha $\frac{42}{7}$; imperocchè , facendo la divisione

(a) S'avverta , che quando si riduce un intero a frazione , ciò si fa senza cambiarne il valore : così quando 6 ridotto in frazione è divenuto $\frac{6}{1}$, è rimasto lo stesso , che era prima . Similmente , se non solo si voglia ridurre 6 in frazione , ma si voglia ancora , che abbia per denominatore 6 , farà per lo §. 2.° $\frac{36}{6}$, questo farà lo stesso , che 6 . La ragione dipende dal num. 78.

ne di 42 per 7, si ha 6 nel quoziente, dunque $\frac{42}{7}$, e 6 sono espressioni equivalenti.

3°. Per ridurre in una frazione sola un numero intero congiunto a frazione, bisogna moltiplicare il numero intero per lo denominatore della frazione, aggiungerne il numeratore al prodotto, e della somma farne il numeratore della frazione cercata; così $6 \frac{1}{2}$ si riduce alla frazione $\frac{13}{2}$, $3 \frac{1}{3}$ si riduce a $\frac{10}{3}$.

81. II. *Per ridurre molte Frazioni alla stessa denominazione.*

Moltiplicate il numeratore, e'l denominatore di ciascuna frazione per ciascuno de' denominatori di tutte le altre frazioni.

Per esempio, per ridurre $\frac{1}{2}$, e $\frac{1}{4}$ allo stesso denominatore, moltiplico i due termini di $\frac{1}{2}$ per 4, ed ho $\frac{4}{8}$; moltiplico indi i due termini di $\frac{1}{4}$ per 2, ed ho $\frac{2}{8}$: le due frazioni dunque sono $\frac{4}{8}$, e $\frac{2}{8}$.

Per ridurre le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$ allo stesso denominatore, moltiplico i due termini di $\frac{2}{3}$ per 7, poi per 4, ed ho $\frac{2 \times 7 \times 4}{3 \times 7 \times 4} = \frac{56}{84}$. Moltiplico quelli di $\frac{5}{7}$ per 3, e per 4, ed ho $\frac{5 \times 3 \times 4}{7 \times 3 \times 4} = \frac{60}{84}$. Moltiplico in fine quelli di $\frac{3}{4}$

per 3, e per 7, ed ho $\frac{3 \times 3 \times 7}{4 \times 3 \times 7} = \frac{63}{84}$; e le tre frazioni ridotte sono $\frac{56}{84}$, $\frac{60}{84}$, $\frac{63}{84}$, che sono uguali alle tre proposte (78), perchè ciascuno de' loro due termini è stato moltiplicato per le stesse quantità.

* Nel caso, che il denominatore d'una fra-

zione sia multiplo di quello dell'altra, come nelle frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, dividete il denominatore 6 per 3; per lo quoto 2 moltiplicate i termini di $\frac{2}{3}$, ed avrete la frazione $\frac{4}{6}$ uguale alla prima, e collo stesso denominatore, che ha $\frac{4}{6}$ (a).

82. Collo stesso metodo si potrebbero ridurre quante frazioni si vorrebbero allo stesso numeratore, moltiplicando i due termini di ciascuna per ciascun numeratore delle altre. Così le tre frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$ si riducono a queste $\frac{20}{28}$, $\frac{15}{28}$, $\frac{30}{28}$.

83. III. Per ridurre una frazione data ad un numeratore, o denominatore qualunque.

Poichè le frazioni sono rapporti geometrici, si può qualche volta scambiare una frazione data in un'altra, il cui Numeratore, o il Denominatore sia dato, e ciò per una semplice regola del tre. Per esempio la frazione $\frac{3}{4}$ si può ridurre ad una frazione, il cui denominatore sia 20, dicendo, se 5 hanno 3 per numeratore, che avranno 20 per numeratore? Si troverà 12. Dunque $\frac{3}{4} = \frac{12}{20}$. Similmente si può ridurre questa frazione in un'altra, che abbia 18 per numeratore, dicendo, se 3 han 5 per denominatore, che avranno 18? Si trova 30. Dunque $\frac{3}{4} = \frac{18}{30}$. Questa riduzione è possibile solamente quan-

(a) Ovvero: Perchè le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ si riducano a uno stesso denominatore, si offervi che moltiplicando 3 per 2, s'ha 6; onde si moltiplichino anche il numeratore 2 per la stessa quantità 2, e s'avrà la frazione $\frac{2}{3}$ ridotta a $\frac{4}{6}$, che sarà della stessa denominazione di $\frac{4}{6}$. Così $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ si ridurranno alla stessa denominazione, moltiplicando per 3 il numeratore, e l' denominatore di $\frac{2}{3}$, onde s'avranno $\frac{6}{9}$, $\frac{4}{9}$.

quando il numero dato è multiplo del suo omologo nella frazione data.

Per queste sorte di riduzioni si valutano le frazioni, per esempio, quelle delle lire in soldi, o parti ventefime: quelle de' soldi in danari, o parti dodicesime.

84. IV. Per ridurre una frazione all' espressione la più semplice.

Bisogna esaminar in primo luogo, se il numeratore è maggiore del denominatore; perchè allora bisogna dividere il numeratore pel denominatore. Così $\frac{12}{4}$ si riduce a 3, o $\frac{12}{4} = 3$, $\frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}$ (a).

85. Bisogna dappoi vedere, se il numeratore, e'l denominatore possano esser divisi tutti e due senza resto per uno stesso numero; imperocchè allora l' espressione diverrebbe la più semplice senza mutarne il valore (78). E diverrà anco più semplice, quanto più grande sarà il numero, per cui i suoi termini saranno divisi.

Il saggio di questa riduzione si fa ordinariamente per la conoscenza di certe proprietà de' numeri.

1°. Ogni numero pari è multiplo di 2, o è divisibile per 2: dunque, sempre che i termini d' una frazione sono pari, possono essere ridotti

C. 3

alla

(a) Le frazioni, che hanno il numeratore maggiore del denominatore non sono frazioni vere, ma spurie; poichè non ostante, che si presentino sotto l' aspetto di frazioni, in esse però sempre vi si nascondono interi, che bisogna separarli per mezzo dell' operazione prescritta, giacchè le frazioni (76) propriamente dette sono le sole quantità minori dell' unità.

alla loro metà: per esempio, la frazione $\frac{1\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}}$ si riduce ad $\frac{3}{9}$, dividendosi sempre per 2, e facendo $\frac{1\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

2°. Ogni numero terminato col 0 è divisibile per 5, e per 10. Così la frazione $\frac{30}{10}$ si riduce a $\frac{3}{1}$.

3°. Ogni numero terminato col 5 è multiplo di 5. Così $\frac{15}{5} = \frac{3}{1}$. Similmente $\frac{150}{50} = \frac{3}{1}$.

4°. Ogni numero tale, che la somma delle sue cifre sia 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 &c. è un multiplo di 3. Così la frazione $\frac{96}{217}$ è divisibile per 3, e si riduce prima a $\frac{32}{72\frac{1}{3}}$, poi a $\frac{32}{73}$, perchè la somma delle cifre del numeratore, e quella delle cifre del denominatore è 9; e, dopo la prima divisione, la somma delle cifre del numeratore 96 era 15, e quella delle cifre del denominatore 217 era 9.

86. Ecco il metodo generale per trovare il gran divisore possibile di due quantità qualunque. Dividete il più grande pel più piccolo; e se la divisione si fa senza resto, la più piccola quantità è il più gran divisore cercato.

Se dopo la divisione si trova un resto, dividete la più piccola quantità data per questo resto; e se la divisione si fa senza un nuovo resto, il primo resto è il più gran divisore cercato.

Se si trova un secondo resto, dividete il primo resto per questo secondo resto, e, se la divisione si fa senza terzo resto, il secondo resto è il più gran comune divisore cercato.

In generale, il resto che divide esattamente il resto precedente è il più gran comune divisore cercato.

ESEM-

ESEMPIO. Si vuol ridurre la frazione $\frac{294}{91}$ all'espressione la più semplice.

Per ciò, bisogna cercare il più gran comune divisore di 294, e 91; dividete 294 per 91, e trascurando il quoto 3, il resto è 21; dividete 91 per 21, trascurando il quoto 4, il resto è 7; dividete il primo resto 21 pel secondo resto 7, e 'l quoziente 3 trovandosi senza resto, io conchiudo, che 7 è il più gran comune divisore di 294, e 91; così la frazione $\frac{294}{91}$ si può ridurre a $\frac{42}{13}$, dividendo ciascun termine per 7. E $\frac{42}{13}$ è l'espressione la più semplice di $\frac{294}{91}$.

Quando la frazione non si può ridurre all'espressione la più semplice, queste divisioni infine vengono ad avere l'unità per ultimo resto. Imperocchè l'unità è un divisore comune a tutti i numeri.

Per concepir la ragione di questa regola bisogna osservare, che due quantità non sono divisibili senza resto per uno stesso numero, che quando elleno sono prodotti esatti di questo numero.

La più gran quantità è prodotta da questo numero preso più volte, che non si prende nella più piccola quantità. Or due quantità A , e B essendo così composte, se, avendo tolta la più piccola B dalla più grande A quante volte è possibile, per esempio 3 volte, non vi rimane resto, egli è chiaro che A è composta da B presa 3 volte, e B è composta da B presa una volta, e che per conseguenza B è in questo caso il più gran comune divisore delle quantità A , e B ,

2°. Ma se, avendo tolta B da A quante volte è possibile (cioè a dire tre volte in questo esempio) si trova un resto C . Allora $A - C$ è una quantità composta di B prese tre volte esatte; e $A - C =$

$$C \quad 4.$$

$$3B;$$

3 B; per conseguenza, se C è contenuta un certo numero di volte esatto, per esempio 4 volte, in B, sarà ancora contenuta un numero esatto di volte in $A - C$. In effetto egli è chiaro, che si avrà $B = 4C$, ed $A - C = 3 B$ diverrà $A - C = 3 \times 4C$, donde si deduce $A = 13 C$ (a). Bisogna dunque togliere C da B quante volte è possibile, e, se ciò si fa senza resto, C è la quantità, che ha servito a comporre le quantità A, e B.

3°. Ma se, avendo tolta C da B quante volte è possibile, per esempio 4 volte, si trovi un resto D: allora $B - D$ è una quantità composta di C presa 4 volte esatte, o $B - D = 4C$. Dunque, se D è contenuta un certo numero di volte esatte, per esempio, 3 volte in C, sarà esattamente ancora in A, ed in B, e sarà il numero, che avrà servito a comporre le quantità A, e B. Imperocchè si avrà $C = 3 D$: dunque nell'equazione $B - D = 4C$, si avrà $B - D = 4 \times 3 D$, e per conseguenza $B = 13 D$, e l'equazione $A - C = 3 B$, diverrà $A - 3 D = 3 \times 13 D$; dunque $A = 42 D$ (b).

In continuando questo ragionamento si vedrà, che l'ultimo resto, che si può togliere un certo numero di volte esatte dal residuo precedente è la quantità, che ha servito a formare le due quantità A, e B; e per conseguenza, che è il loro più gran comune divisore.

Egli è evidente ancora (51), che è la stessa cosa dividere una quantità per un'altra, che toglier-

(a) Essendo $A - C = 3 \times 4C$, si lasci sola A da una parte del segno $=$, s'avrà dall'altra parte $3 \times 4C + C$, che fanno $12C + C$, cioè $13C$ (217).

(b) La ragione n° è la stessa del §. precedente.

gliene quest' altra quante volte è possibile .

Dell' Addizione delle Frazioni .

87. **P**ER a aggiungere insieme le frazioni . Riducetele allo stesso denominatore , e della somma di tutti i numeratori delle frazioni ridotte fate il numeratore d' una nuova frazione , che abbia il denominatore comune .

Così per aggiungere le frazioni $\frac{2}{3}$ ed $\frac{1}{6}$, riducetele (81) a queste qui $\frac{4}{6}$, $\frac{1}{6}$, la loro somma è $\frac{5}{6}$.

Per aggiungere insieme le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{10}$ riducetele (81) a queste qui $\frac{16}{24}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{18}{24}$, la

somma de' numeratori è 46, io ho dunque $\frac{46}{24}$, e riducendol' all' espressione la più semplice ; $1 \frac{23}{12}$.

88. Se vi sono numeri interi congiunti colle frazioni, bisogna unire la loro somma con quella delle frazioni, così $4 \frac{1}{2} + 2 \frac{2}{3} = 6 \frac{5}{6}$, similmente $3 \frac{2}{5} + 4 \frac{3}{10} = 8 \frac{5}{10}$.

* Per maggior facilità possiamo sommar le frazioni date a due a due, ridurne la somma, e poi sommar le altre succéssivamente . Così nell' esempio proposto da sommar $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5}$, diremo $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4}$, e poi $1 \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = 1 \frac{11}{20}$.

89. **P**ER sottrarre una frazione da un' altra *riducetela allo stesso denominatore, prendete la differenza tra' due numeratori, e fatene il numeratore d'una nuova frazione, che abbia il denominatore comune.*

ESEMPIO. Bisogna sottrarre $\frac{1}{4}$ da $\frac{2}{3}$, riducetela le (81) a queste quì $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$; e sarà chiaro, che la differenza è $\frac{5}{12}$.

90. Se vi sono numeri interi in testa delle frazioni, bisogna sottrargli secondo il solito, e porre in testa della nuova frazione la loro differenza; così per togliere $3\frac{1}{2}$ da $4\frac{3}{4}$ bisogna scrivere $1\frac{3}{4}$, o (85) $1\frac{1}{2}$.

91. Ma se la frazione della quantità da sottrarsi è maggiore, o se bisogna togliere la frazione da un numero intero, allora bisogna ridurre in frazione [80] una unità di questo numero intero: Per esempio per togliere $3\frac{2}{3}$ da $6\frac{1}{3}$ io riduco la quantità $6\frac{1}{3}$ a $5\frac{4}{3}$, e riducendo $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{3}$ allo stesso denominatore; io ho $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{3}$, tolgo $\frac{2}{3}$ da $\frac{4}{3}$, resta $\frac{2}{3}$: tolgo 3 da 5 resta 2: onde la differenza cercata è $2\frac{2}{3}$.

Similmente per togliere la frazione $\frac{2}{3}$ da 4, io riduco 4 a questa espressione $3\frac{1}{3}$, di maniera che, togliendo $\frac{2}{3}$ da $3\frac{1}{3}$, resta $3\frac{1}{3}$. Per togliere $\frac{2}{3}$ da 2, io riduco 2 ad $1\frac{2}{3}$, e la differenza è $1\frac{1}{3}$.

Della Moltiplicazione.

92. **P**ER moltiplicare due termini, o tutti e due frazionarij, o in parte frazionarij, bisogna seguir questa regola generale. *Se qualche termine non è frazionario, riducetelo tutto in frazione, o in forma di frazione. Fate indi una nuova frazione, il cui numeratore sia il prodotto de' numeratori del moltiplicando, e del moltiplicatore; e 'l cui denominatore sia il prodotto de' loro denominatori.*

In fine riducete questa frazione all'espressione la più semplice. Per esempio.

Per moltiplicar	per	Scrivete	Prodotto	Espressione la più semplice.
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{7}{12}$	4	$\frac{7}{12} \times \frac{4}{1}$	$\frac{28}{12}$	$2\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	$4\frac{5}{7}$	$\frac{2}{3} \times \frac{33}{7}$	$\frac{66}{21}$	$3\frac{2}{7}$
$3\frac{3}{4}$	$5\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4} \times \frac{11}{2}$	$\frac{165}{8}$	$20\frac{5}{8}$

Per concepir la ragione di questa regola bisogna rammentarsi, che moltiplicar, per esempio, $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$, non è altro, che prendere $\frac{2}{3}$ tante volte, quante volte l'unità entra in $\frac{1}{2}$ [43]; ma l'unità entra una mezza volta in $\frac{1}{2}$. Dunque bisogna prendere $\frac{2}{3}$ una mezza volta, dunque $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ [a].

93.

(a) Dal 2° esempio è chiaro, che dovendosi moltiplicare un intero per una frazione, e reciprocamente: *bisogna moltiplicare il numeratore della fra-*
zione.

93. * OSSERVAZIONI I. Dunque 1°. Dovendo moltiplicare una frazione per $\frac{1}{2}$ bisogna dividerla per 2. Ma una frazione può dividerfi per un intero, anche col dividerne il numeratore per quest' intero (cor. n. 74.). Dunque, quando il numeratore d'una frazione, come $\frac{2}{3}$, è multiplo del divisore dato, come di 2, potrà la frazione $\frac{2}{3}$ dividerfi per 2, cioè moltiplicarsi per $\frac{1}{2}$, con dividerne il numeratore per 2, e dire $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2:2}{3} = \frac{1}{3}$.

2°. Una frazione si moltiplica per un numero, anche col dividerne il denominatore per lo numero dato (cor. n. 74.) Dunque dovendosi moltiplicar $\frac{7}{12}$ per 4, potrà dirsi $\frac{7}{12} \times 4 = \frac{7}{12:4} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$. E quest'altra regola ha luogo, quando il denominatore della frazione è multiplo del moltiplicatore dato.

3°. Dovendo moltiplicar $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{3}$, bisogna dividere la frazione $\frac{3}{4}$ per 3, e moltiplicarne il quoto per 2; essendo $\frac{2}{3}$ duplo di $\frac{1}{3}$, dunque per la prima operazione dovrà dirsi $\frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4 \times 3} = \frac{1}{12}$, e per la seconda $\frac{1}{12} \times 2 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Oppa-
zione, o dividere il suo numeratore per l' intero : Poichè s'avrebbe il medesimo risultato $2\frac{1}{3}$, o che si dica $4 \times 7 = 28$, e s' avrà $\frac{28}{12} = 2\frac{1}{3}$; o che si dica $12 : 4 = 3$, e si scriva $\frac{12}{3} = 4$. Però questa seconda maniera non può sempre adoperarsi, perchè il denominatore della frazione non è sempre perfettamente divisibile per l'intero proposto.

Oppure in questo caso , che i termini dell' una sono multipli di quelli dell' altra , potrà dirsi: $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$.

Oltracciò per moltiplicar $\frac{3}{4}$ per $4 \frac{1}{2}$ il prodotto si può trovare , prima con moltiplicar $\frac{3}{4}$ per 4 , poi per $\frac{1}{2}$, e indi sommarne i prodotti parziali .

Il prodotto poi di $3 \frac{3}{4}$ per $5 \frac{1}{2}$, è la somma di 4 prodotti , 1° . di $3 \times 5 = 15$, 2° . di $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4}$, 3° . di $3 \times \frac{1}{2} = 1 \frac{1}{2}$, 4° . di $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$, la somma de' quali è $20 \frac{1}{8}$.

94. II. Si potrebbe far questa difficoltà ? di s. l. do fanno 8 danari , $\frac{5}{2}$ di soldo fa 5 danari : or $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$ hanno per prodotto $\frac{15}{8}$ di s. l. do ; quando 8 danari moltiplicati per 5 danari fanno 48 danari .

Per risolver questa difficoltà bisogna notare , che le misure cangiano natura per la moltiplicazione ; le loro parti s' elevano al quadrato , quando le loro misure vengono ad essere moltiplicate , o ad aver due dimensioni (vedete N° 586.) ; ed elleno s' elevano a cubi (708) quando le loro misure vengono ad avere 3 dimensioni .

Così una misura semplice fatta in piedi non può aver pollici in frazione , che a ragion di 12 pollici per piede .

Ma una misura di piedi , per esempio , una lunghezza , moltiplicata per un' altra misura fatta in piedi , come una larghezza , ha per prodotto una superficie d' un certo numero di piedi quadrati , composti ciascuno di 144 pollici .

Una dimensione sola in tese ha 6 piedi per tesa , ma un corpo di 3 dimensioni ha 216 piedi cubici alla tesa . Per questa stessa ragione $\frac{3}{4}$ di soldo moltipli-

46

plicate per $\frac{2}{3}$ di soldo ba per prodotto $\frac{2}{3}$ di soldo (non a 12 danari il soldo ma) a ragione di 144 danari ciascuna. Or egli è evidente, che $\frac{2}{3}$ di soldo a ragione di 144 danari per ciascuno è la stessa cosa, che 48. danari, che è il prodotto di 6×8 danari.

Della Divisione.

95. **L**A divisione delle frazioni si pratica precisamente come la moltiplicazione, eccetto che bisogna rovesciare i termini del divisore mettendo il suo numeratore sotto, ed il suo denominatore sopra. Per esempio.

Per dividere per		Scrivete	indi	Quoto	Espressione la più semplice.
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4} \times \frac{2}{1}$	$\frac{6}{4}$	$1 \frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	5	$\frac{2}{3} : \frac{5}{1}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
$\frac{4}{5}$	$2 \frac{1}{2}$	$\frac{4}{5} : \frac{5}{2}$	$\frac{4}{5} \times \frac{2}{5}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{8}{25}$
3	$2 \frac{2}{3}$	$3 : \frac{7}{3}$	$3 \times \frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	$1 \frac{2}{7}$

Per concepir questa regola, o, per esempio, per qual ragione $\frac{3}{4}$ divise per $\frac{1}{2}$ danno 1 per quoziente, bisogna risovvenirsi, che il quoziente deve esser contenuto tante volte nel dividendo, quante volte l'unità è contenuta nel divisore.

Ma l'unità non è contenuta, che una mezza

47.
za volta in $\frac{1}{2}$, dunque il quoziente di $\frac{1}{2}$ diviso per $\frac{1}{2}$ non dev'esser contenuto, che una mezza volta in $\frac{1}{4}$. Ma una quantità, che non è contenuta, che una mezza volta in un'altra è doppia di quest'altra, dunque il quoziente di $\frac{1}{4}$ per $\frac{1}{2}$ è doppio di $\frac{1}{4}$, cioè a dire è $\frac{1}{2}$ o $1 \frac{1}{2}$.

Inoltre, se si moltiplica ciascuno di questi quozienti pel divisore, si avrà il dividendo, così $1 \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, o $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

L'istesso deve dirli delle altre.

* ALTRE DIMOSTRAZIONI.

1°. Poichè moltiplicar $\frac{1}{4}$ per $\frac{1}{2}$ è l'istesso, che dividerla per due, per un'operazione contraria, dividere $\frac{1}{4}$ per $\frac{1}{2}$ è l'istesso, che moltiplicarla per 2, dunque vale la prima regola.

2°. Dividere poi $\frac{1}{4}$ per $\frac{1}{5}$ è trovare $\frac{1}{4}$ di $\frac{5}{1}$, cioè moltiplicarla per $\frac{5}{1}$, dunque vale la seconda regola.

3°. Dividere $\frac{4}{5}$ per $\frac{1}{5}$ è l'istesso che dividerla per $\frac{1}{5}$ cinque volte; ma dividerla per $\frac{1}{5}$ si è moltiplicarla per 5 (n. 1.) e dividerla cinque volte si è trovar $\frac{1}{5}$ del quoto, cioè moltiplicarlo per $\frac{1}{5}$. Dunque vale la terza regola.

OSSERVAZIONI I. La divisione cangiandosi in moltiplicazione, ci possiamo servir degli stessi raccorci, quivi accennati. *

II. Una porzione di frazione, per esempio $\frac{1}{4}$ di $\frac{3}{5}$, si chiama una frazione di frazione. Egli è evidente, che $\frac{1}{4}$ di $\frac{3}{5}$ significa, che bisogna prendere 3 volte il $\frac{1}{4}$ di $\frac{3}{5}$. Bisogna dunque dividere $\frac{3}{5}$ per 4, il che dà $\frac{3}{20}$, e moltiplicarlo per 3, il che dà $\frac{9}{20}$.

moltiplicarne il quoto per 3, il che dà $\frac{6}{14}$ o $\frac{3}{7}$.
 Ma $\frac{6}{14}$ è il prodotto di $\frac{2}{7}$ per $\frac{3}{7}$, dunque

1°. Il valore d'una frazione di frazione è
 il prodotto di queste due frazioni. 2°. I $\frac{2}{7}$ di
 $\frac{3}{7}$ o i $\frac{2}{7}$ di $\frac{3}{7}$ sono dello stesso valore ($\frac{6}{49}$).
 Si può applicar ciò alle frazioni di frazioni al-
 l'infinito.

DELLE FRAZIONI DECIMALI.

Della Natura delle Frazioni Decimali.

96. **O**ltre le frazioni precedenti, i Matematici si servono di quelle, che chiamano *Decimali*, che han sempre per denominatore l'unità seguita da tanti zeri, quante cifre vi sono nel numeratore; e perciò non si scrive questo denominatore, ma solamente il numeratore, le cui cifre sono precedute da una virgola, per distinguerle da' numeri interi. Per esempio, per esprimere $19\frac{4}{10}$ si scrive 19, 4; per esprimere $19\frac{4}{100}$ si scrive 19, 04; affinchè per lo zero messo davanti il 4, si conosca, che il denominatore è 100: per esprimere $19\frac{4}{1000}$, si scrive 19, 004; similmente $49, 01741 = 49\frac{1741}{100000}$; $0,035 = \frac{35}{1000}$.

97. Vi sono Autori, che si servono d'un punto in luogo della virgola. La maggior parte non pongono il zero avanti il punto, o la virgola, per esprimere una frazione sola: ma per notare, per esempio, $\frac{35}{1000}$, scrivono, 035, ovvero. 035; per iscrivere $\frac{4}{1000}$, pongono, 0004, oppure. 0004.

89. Da ciò si vede, che la prima de' decimali, cioè la prima cifra a destra dopo la virgola, esprime le decime; la seconda decimale esprime le centesime, la terza le millesime ec. Così 4, 217 è lo stesso; che $4 + \frac{2}{10} + \frac{17}{100} + \frac{7}{1000}$. (a)

D

99.

(a) Poichè quest' espressione 4, 217 equivale a quest'altra $4 + \frac{2}{10} + \frac{17}{100} + \frac{7}{1000}$ (78), che si riduce a $4\frac{217}{1000}$.

99. Poichè (78), moltiplicando i due termini d'una frazione per un numero non se ne cangia il valore, e' ne segue, che le frazioni $0, 1$ per esempio: $0, 100 : 0, 1000$, ec. son uguali; similmente, $4, 7 = 4, 7000$, ec. e che così non si aumenta il valore d'una frazione decimale, aggiungendovi i zeri sulla destra. E' chiaro ancora, che $4, 7$ è maggiore di $4, 69$, o anche di $4, 699999$, ec. imperocchè $4, 7 = 4 = \frac{7}{10} = 4 \frac{7}{10} = 4 \frac{7000}{10000}$, e $4, 69 = 4 \frac{69}{100}$; e $4, 699999 = 4 \frac{699999}{1000000}$, or $\frac{7}{10} = \frac{7000}{10000}$ è maggiore di $\frac{69}{100} = \frac{6900}{10000}$ (77), e $\frac{7000}{10000}$ è maggiore di $\frac{699999}{1000000}$, dunque $4, 7$ è maggiore di $4, 69$, ovvero di $4, 699999$, o infine di 4 seguito da una frazione di quante cifre si vogliono, la prima delle quali sia minore di 7.

100. Ma si vede, che $4, 699999$ s' approssima più ad essere uguale a $4, 7$, che $4, 69$, o che $4, 6999$; e che $4, 6999$ s' approssima più al valore di 7, che $4, 69$; perchè vi bisogna una sola $\frac{1}{1000000}$, affinchè $4, 699999$ sia $= 4, 700000 = 4, 7$, quando che ve ne fa duopo di $\frac{1}{10000}$ affinchè $4, 6999$ sia $= 4, 7000 = 4, 7$, e che ve ne vuole $\frac{1}{1000}$ affinchè, $4, 69$ sia $= 4, 70 = 4, 7$; or $\frac{1}{1000000}$ è molto più piccola che $\frac{1}{10000}$; e $\frac{1}{10000}$ è molto più piccola che $\frac{1}{1000}$; dunque la differenza fra $4, 7$, e $4, 699999$ è molto più piccola, che la differenza fra $4, 7$, e $4, 6999$; e quella che è fra $4, 6999$, e $4, 7$ è molto più piccola di quella, che è fra $4, 69$, e $4, 7$; dunque $4, 699999$ s' approssima molto più ad essere uguale a $4, 7$, che $4, 6999$; e $4, 6999$

6999 s'approssima molto più ad essere uguale a 4, 7, che 4, 69.

101. Onde segue I. Che una frazione decimale è maggiore d'un'altra, se le prime cifre sono precisamente le stesse di quest'altra, e se ella ha oltr'a ciò alcune altre cifre, che non sono tutte zeri. (a)

102. II. Che, quando si ha una frazione decimale composta di più cifre, non se ne possono togliere alcune sulla destra senz'altro molto diminuire il valore della frazione: per esempio, il risultato d'un calcolo dando 2, 4545 tesa, se io tolgo l'ultima cifra, scrivendo 2, 454, diminuisco il valor della frazione di $\frac{1}{10000}$ di tesa, il che vale circa una mezza linea; se io ne tolgo le due ultime, scrivendo 2, 45 diminuisco il valor della frazione di $\frac{1}{1000}$ di tesa, che vale 4 linee in circa.

103. III. Che non bisogna impiegare molte cifre nel calcolo de' decimali, come per esempio cinque, o sei, se non quando si ha di bisogno d'una gran precisione; ma che basta ordinariamente impiegarne una, o due, o al più tre; imperocchè, per esempio, se una tesa d'opera si pagasse 3 lire, è chiaro, che la $\frac{6}{1000}$, o anche la $\frac{6}{10000}$ parte d'una tesa farebbe di poca conseguenza, poichè la $\frac{6}{10000}$ varrebbe da 3 danari e $\frac{1}{2}$ in circa, e che per conseguenza im-

D 2

que.

(a) Così $\frac{1}{1000}$ è maggiore di $\frac{1}{10000}$: poichè la prima espressione equivale a $\frac{10}{10000} + \frac{1}{10000}$, e la seconda equivale a $\frac{1}{10000}$: dove si scorge troppo chiaramente che $\frac{1}{1000} + \frac{1}{10000}$ è maggiore di $\frac{1}{1000}$. Così $\frac{1}{10000}$ sarà maggiore di $\frac{1}{100000}$, ec.

questo caso si possono trascurare le due ultime cifre della frazione $2,4546$: ma, se si pagasse 10000 lire la tela, allora la $\frac{6}{15555}$ varrebbe 6 lire, e la $\frac{46}{10000}$ varrebbe 46 lire, il che potrebbe essere di conseguenza; dunque in questo caso bisogna servirsi di molte cifre.

104. Ma, togliendo le ultime cifre da una frazione decimale, *bisogna aggiungere una unità alla cifra, che resta l'ultima, quando la prima delle cifre, che si trascurano sorpassa 5*. Per esempio, se nella frazione $0,4864$ io trascuro le due ultime cifre, devo scrivere $0,49$, e non $0,48$; perchè $0,49 = 0,4900$ (99), e $0,48 = 0,4800$: or $0,4900$ s'approssima più al valore di $0,4864$, che non fa $0,4800$; dunque bisogna scrivere $0,49$, e non $0,48$. Similmente, dovendo togliere le due ultime cifre da $0,1953$, devo scrivere $0,20$, e non $0,19$; ma, se io ho, per esempio, $0,455$, posso scrivere a mio piacere $0,45$, ovvero $0,46$.

105. Poichè le frazioni (62) per lo più altro non sono, che residui di divisioni; quando il divisore non è contenuto un numero esatto di volte nel dividendo; se, dopo aver fatta la divisione, si vuole avere nel quoziente una frazion decimale in luogo d'una frazione ordinaria, bisogna aggiungere 0 al residuo, e continuar la divisione per lo stesso divisore, la cifra, che si troverà al quoziente, sarà la prima decimale; se di nuovo si ha un residuo, bisogna anche aggiungervi 0, e continuando la divisione si avrà una seconda decimale, e così delle

delle altre, finchè non vi sia più resto, o che si abbian sufficienti decimali.

Per esempio, avendo diviso (66) 147475 per 362, e trovato il quoziente 407 col residuo 141, aggiungo 0 a questo residuo, e divido 1410 per 362, ed ho 3 al quoziente, ed un nuovo resto 324; vi aggiungo 0, e dividendo 3240 per 362, ho al quoziente 8, e resta 344; vi aggiungo anche 0, ed ho al quoziente 9, e 'l residuo 182, che io trascuro, perchè ho tre decimali, i quali mi bastano. Onde il quoziente di 147475 diviso per 362 è 407, 389.

106. Collo stesso metodo si riduce una frazione ordinaria in frazione decimale. Per esempio, per ridurvi $\frac{3}{4}$ aggiungo 0 al numeratore 3, e divido 30 per 4, il quoto è 7, e 'l resto è 2; vi aggiungo 0, e divido 20 per 4, il quoto è 5 senza resto: onde conchiudo, che $\frac{3}{4} = 0,75$. E in fatti è chiaro, che, essendo 25 il quarto di 100, 75 ne faranno i tre quarti.

107. Vi sono moltissime frazioni, che non possono ridursi esattamente in frazioni decimali, per qualunque numero di volte si aggiungano 0 a' residui delle divisioni. Si riconosce ciò facilmente o quando si arriva ad aver sempre uno stesso resto, o quando si veggono ritornar le stesse cifre nello stesso ordine. Per esempio, se si volesse ridurre $\frac{1}{7}$ in frazione decimale, si troverebbe 0, 571428571428571428 ec. senza poter arrivare a non aver residuo. Similmente per ridurre $\frac{5}{7}$ in frazione decimale si trova 0, 716666 ec. In questi casi bisogna contentarsi di due, o tre prime decima-

li, e trascurare il resto. Così si può supporre $\frac{4}{7} = 0,57$ (a). E $\frac{1}{1,7} = 0,417$.

108. OSSERVAZIONE. Le cifre che ritornano nello stesso ordine, vi tornano al più tardi nel sito della frazione espressa dal denominatore della frazione [0].

Delle Operazioni sulle frazioni decimali.

109. **L**E operazioni dell'aritmetica sulle frazioni decimali sono precisamente le stesse, che quelle che si fanno sopra i numeri interi: si deve solamente aver qualche avvertenza nel situar la virgola, che separa i numeri interi da' decimali, quando si è compita un'operazione.

110. I. Per sommare queste quantità 4852, 791; 4,00745; 2,7; 0,0049, bisogna scrivere in colonna i numeri interi, secondo il loro valore, e giusta il solito, in modo che le virgole siano anche in colonna; bisogna scrivere l'una dopo l'altra le frazioni, e prendere la somma di tutto, come si vede quì.

4852,

(a) Poichè 100 è il denominatore della frazione 0,57: si divida 100 per 7, s'avrà per quoziente 14 (e qualche cosa di più). Dunque 14 (e qualche cosa di più) sarà $\frac{1}{7}$ di 100: se ne prendano 4 di questi 14, (e qualche cosa di più) e s'avranno $\frac{56}{100}$, che saranno eguali a $\frac{4}{7}$.

(b) Così nell'esempio citato di sopra per ridurre $\frac{4}{7}$ in frazione decimale, s'è avuto 0,571428571428: ove si vede, che dopo aver avuto 571428, si cominciano e di bel nuovo ad avere nel quoziente le stesse cifre 571428, e si comincia giusto ad averle al numero settimo, ch'è il denominatore della frazione, di cui si parla.

4852, 791	poichè que-	4752, 79100
4, 00745	ste quantità	4, 00745
2, 7	equivalgono	2, 70000
0, 0049	a quest' al-	0, 00490
	tre.	

4859, 50335	4859, 50335
-------------	-------------

III. II. La sottrazione si fa ordinando le quantità date nella stessa maniera, ed operando come si fa ordinariamente.

57, 02	4, 8274	6, 00435	3, 842
48, 1	2, 0139	0, 17	1, 004554
8, 92	2, 8135	5, 83435	2, 837446

III. III. La moltiplicazione si fa precisamente, come quella de' numeri interi, senza badare la prima volta alla posizione delle virgole, ma, quando si è presa la somma di ciascun prodotto per avere un prodotto totale, *bisogna separare per mezzo d'una virgola tante cifre sulla destra, quante decimali vi sono nelle frazioni del moltiplicando, e del moltiplicatore*; in modo che se questa somma non fosse espressa da tante cifre, quante decimali vi sono nel moltiplicando, e nel moltiplicatore, bisognerà mettere sulla destra un numero sufficiente di zeri; si veggia il secondo Esempio.

43,7	2,4542	3,7	21,32
13	0,0053	4,12	0,100103
1311	73626	74	6396
437	122710	37	2132
		148	2132
568,1	0,01300726		
		15,244	2,13419596

Per dare una ragione di questa regola noi prenderemo il terzo esempio, dove $3,7 = (96) 3 \frac{7}{10} = (80) \frac{17}{5}$. Per le stesse ragioni $4,12 = 4 \frac{12}{100} = \frac{412}{100}$; se dunque si moltiplica $(92) \frac{17}{5}$, per $\frac{412}{100}$ il prodotto farà $\frac{17 \cdot 412}{5 \cdot 100} = \frac{7004}{500}$, che si riduce $(84) a .15 \frac{4}{5} = (96) 15,244$.

113. IV. La Divisione è anche la stessa, che quella de' numeri interi; ma, avendo trovato il quoziente, ne bisogna separare per mezzo d'una virgola tante cifre a destra, quanti decimali vi sono di più nel dividendo, che nel divisore. Così per lo primo esempio, dove si è diviso 8,445 per 3,22, dopo aver trovato (66) il quoziente 26 secondo l'ordinario, si è separata per una virgola l'ultima cifra 6, perchè vi è una sola decimale di più nel dividendo, che nel divisore.

114. Ma se si trovano più decimali nel divisore, che nel dividendo (vedete il 3° esempio) allora bisogna aggiungere a' decimali del dividendo quanti zeri si vorranno, ma in modo, che facciasi il numero de' decimali del dividendo un pò più grande del numero de' decimali.

cimali del divisore, acciò se ne abbiano alcuni nel quoto.

8,445	13,22	19,83542	10,326	149,1	120,074
6,44	—	19 78	—	140,148	—
—	2,6	1—	30,171	—	2,44
2,005	554		8,9520		
1,932	326		8,0296		
—	—		—		
73	2282		92240		
	2282		80296		
	—		—		
	0		11944		

Imperocchè, se si moltiplica 30,17 per 0,326, si troverà il prodotto 9,83542.

Nel terzo esempio si sono aggiunti quattro zeri al dividendo; imperocchè, se si divide 49,10000 per 20,074 si troverà il quoziente 2,44.

Se si vuole aver riguardo a' residui di queste forti di divisioni, bisogna aggiungergli quanti zeri si vorranno, e i quozienti, che se ne trarranno, continuando la divisione per lo stesso divisore, saranno tanti decimali; così nel primo esempio aggiungendo 3 zeri al residuo 73 si avrà il quoziente 2,6226 con un altro residuo 228, che si può trascurare.

Delle altre specie di frazioni.

POichè siamo obligati d'impiegare nelle differenti parti delle Matematiche, e nel Commercio diverse sorte di misure, le parti di queste misure sono tante specie di frazioni. Ecco le misure le più usate.

115. Il Cerchio si divide in 360 parti eguali, che si chiamano gradi; il grado si divide in 60 minuti, e ciascun minuto in 60 secondi; ciascun secondo in 60 terzi ec. in modo, che un grado, 10 gradi, 20 gradi ec. sono $\frac{1}{360}$, $\frac{10}{360}$, $\frac{20}{360}$ d'un cerchio; un minuto, 15 minuti sono $\frac{1}{60}$, $\frac{15}{60}$ d'un grado; un secondo, 30 secondi sono $\frac{1}{60}$, $\frac{30}{60}$ d'un minuto ec. Queste parti s'esprimono così 1° , $10'$, $20''$: $1'$, $15''$: $1''$, $10'''$, ec.

Un cerchio dunque è di 21600', di 1296000'', di 7776000''' ec. un grado è di 3600'', di 216000''', ec.

Il tempo si divide in giorni, ciascun giorno in 24 parti uguali, che si chiamano ore; ciascun ora in 60 minuti, ciascun minuto in 60 secondi ec. Uno spazio di tempo, per esempio, di 10 ore 17 minuti 44 secondi è uguale a $\frac{10}{24}$ d'un giorno + $\frac{17}{60}$ d'un ora + $\frac{44}{60}$ d'un minuto; si esprime così, 10^{or} 17' 44''.

Un giorno è di 1440', di 86400'', di 5184000''' ec. un ora è di 3600'', di 21600''' ec. un minuto è di 3600''' ec.

Le distanze, in Parigi, si misurano sopra terra per tese; ciascuna tesa ha 6 piedi, ciascun piede ha 12 pollici, ciascun pollice ha 12 linee,

nee, ciascuna linea ha 12 punti; in modo che uno spazio di 4 tese, 2 piedi, 4 pollici, 6 linee, 3 punti, si può esprimere per 4 tese $+$ $\frac{2}{3}$ di tesa $+$ $\frac{4}{12}$ di piede $+$ $\frac{4}{12}$ di pollice $+$ $\frac{6}{12}$ di linea.

Una tesa contiene 72 pollici, o 864 linee, o 10368 punti: un piede è di 144 linee, di 1728 punti: un pollice è di 144 punti.

La Moneta si divide, *in Parigi*, in lire, soldi, e danari; la lira contiene 20 soldi; il soldo 12 danari; in modo che una somma di 19 l. 15 s. 10 d. ec. è uguale a 19 l. $+$ $\frac{15}{20}$ di lira $+$ $\frac{10}{12}$ di sol.

Una lira è dunque di 240 danari.

I pesi s'esprimono per libbre; la libbra contiene 16 once, l'oncia 8 grossi, il grosso 72 grani. Un peso di 15 libbre, 4 once, 7 grossi, 60 grani è dunque uguale a 15 l. $+$ $\frac{4}{16}$ di libbra $+$ $\frac{7}{8}$ d'oncia $+$ $\frac{60}{72}$ di grosso ec.

Il peso d'una libbra è di 128 grossi; di 9216 grani. Quello d'un oncia è di 576 grani.

116. Onde si può conchiudere in general, che 1°. *D'una misura qualunque le parti, che hanno uno stesso nome, sono frazioni, che hanno uno stesso denominatore.* 2°. *Che questo denominatore è uguale al numero delle parti uguali, che contiene la misura, che precede immediatamente.* Così tutte le once sono frazioni, il cui denominatore è 16, ed è uguale al numero delle parti, che contiene la libbra, che precede immediatamente all'oncia. Tutti i pollici sono frazioni il cui denominatore è 12; perchè il piede, che è la misura, che precede immediatamente il pollice

lice è diviso in 12 parti uguali ; l' istesso è delle altre misure.

117. Per aggiungere queste frazioni, bisogna disporle ciascuna in colonna secondo la loro denominazione, prendere la somma di ciascuna colonna, andando da destra a sinistra ; dividere questa somma per lo denominatore comune [a], quando ella è più grande di questo denominatore ; scrivere il resto di questa divisione al di sotto di questa colonna, e ritenere il quoziente per unirlo alla colonna seguente.

36° 25' 47"	3 ^s	17"	42'	16"
49 33 28	9	13	25	33
55 31 49	11	23	17	42
		12	0	0
141 31 4	25	18	25	31
tese piedi pollici linee punti.				
9 3	11	2	7	
100 0	0	0	0	
47 5	3	8	0	
11 0	10	8	4	
168 4	1	6	11	

fb on-

(a) Si fa questa divisione per liberare la frazione (che in questo caso è *spuria*) dagl' interi , che quì sono minuti primi , e che convengono alla colonna , che segue ; e in questa si devono lasciare a basso i soli minuti secondi , che rimarranno da questa divisione. Così 47", 28", 49", insieme fanno 124", de' quali 120 , cioè 2' appartengono alla colonna , che segue , e si lasciano i soli 4", che essendo secondi , restano a piè della colonna de' minuti secondi .

				61		
libbre	oncie	grossi	grani	lire	soldi	danari.
10	15	7	70	325	17	4
9	10	4	18	15	11	6
47	3	6	40	25	1	8
	13	0	55	4	10	0
68	11	3	39	371	0	6

Questa divisione non è altra cosa [a], che la quarta riduzione delle frazioni [84].

118. Per sottrarre una di queste frazioni dall'altra, bisogna scriverla sotto di quella in colonna. Bisogna far indi la sottrazione di ciascuna colonna secondo l'ordinario; ma convien badare, che, quando un termine inferiore avanza il superiore, bisogna aggiungere a questo superiore il suo denominatore, poi far la sottrazione, ed allora fa d'uopo togliere una unità dal numero superiore della colonna, che segue a sinistra. Così nel secondo esempio per togliere 43 minuti da 19 minuti, aggiungo 60 minuti a 19 minuti, e tolgo 43 minuti dalla somma 79 minuti; scrivo al di sotto il resto 36 minuti, ma nella colonna seguente in luogo di 14 ore ne conto 13. La ragione è, che togliere 11 ore, e 43 minuti da 14 ore, e 19 minuti, è lo stesso che togliere 11 ore, e 43 minuti da 13 ore e 79 minuti; questo si riduce a quello che è stato detto sopra [91]. Ecco gli esempi.

48°

(a) Una frazione spuria si libera dagli interi, co' quali è complicata per mezzo della divisione, e liberata dagli interi viene ad esser ridotta alla più semplice espressione, come si propone a fare nel num. 84.

48°	16'	17"	195	14 ^{or}	19'	40"
25	3	12	3	11	43	30
83	13	5	16	2	36	10
tese piedi pollici linee punti.						
	100	0	0	0	0	
	17	4	5	11	8	
	82	1	6	0	4	
libbre	oncie	grossi	grani	lire	soldi	danari.
47	10	2	55	655	3	4
12	12	5	12	30	0	0
34	13	5	43	625	3	4

119. La moltiplicazione, e la divisione di queste sorti di frazioni, non ha luogo nelle matematiche [a].

Queste due operazioni sono lunghe, e d'una natura differente da quella degli altri numeri, perchè le parti d'una misura moltiplicata, o divisa sono differenti (94) da quelle d'una misura semplice (b).

Per

(a) Purchè però nelle Matematiche non s'abbiano da impiegare alle volte le misure della lunghezza, o della larghezza; perchè in questi casi accade, che la moltiplicazione, e la divisione di tali frazioni, può avervi il suo luogo.

(b) Distinguescono ancora, perchè non si può concepire il prodotto di due misure eterogenee, come sarebbe quello d'un peso, moltiplicato per tese, o per gradi. Ma riguardando queste quantità, come espresse per numeri, che han tra di loro un certo rapporto, si possono cercare, per mezzo delle regole di proporzione, altri numeri, che sien nel medesimo rapporto.

Per abbreviarle si sono inventate per ciascuna di queste sorti di frazioni delle regole particolari, che dipendono dalle proprietà de' numeri, che ne sono i denominatori. Ecco un metodo generale per farle.

120. III. Per trovare il prodotto di due di queste frazioni, bisogna, 1^o. fare questa regola del tre; come l'unità al moltiplicando così il moltiplicatore al prodotto. 2^o. Bisogna ridurre i termini dati alla loro minima specie, cioè bisogna ridurre tutto in danari, se si tratta di lire, soldi, e danari; ridurre tutto in grani, se si tratta di libbre, oncie, grossi, e grani ec. Gli esempj ce ne porranno in chiaro.

Per moltiplicare 4l. 7s. 6d. per 2l. 9s. 7d. io fo, come 1l. è a 4l. 7s. 6d. così 2l. 9s. 7d. sono al prodotto cercato. Riduco tutto in danari; una l. vale 240d., e 4l. 7s. 6d., o 87s. 6d. vagliono 1050d. il che si conosce moltiplicando 87s. per 12 per avere 1044d. che vagliono 87s., ed aggiungendovi 6d. Per la stessa riduzione, 2l. 9s. 7d. vagliono 295. danari: debbo dunque far questa regola di tre $240:1050=595:x$. Trovo $x=2603\frac{1}{4}$; gli riduco in lire, soldi, e danari, dividendo 1^o. per 240, ed ho il quoziente 10l. e il resto 203d. $\frac{1}{4}$. 2^o. Divido $203\frac{1}{4}$ per 12, ed ho il quoziente 16s. e il resto 11d. $\frac{1}{4}$. Dunque il prodotto cercato è 10l. 16s. 11d. $\frac{1}{4}$.

Per moltiplicare 2l. 7 oncie, 5 grossi, per 3l. 7s. io dico: come 1l. è a 2l. 7 oncie, 5 grossi, o grani, così 3l. 7s. od. sono al prodotto cercato; cioè a dire, come 9216 grani sono a 22824 grani; così 804 danari, sono a 1991 $\frac{1}{2}$ danari. Il prodotto dunque è 8l. 5s. 11d. $\frac{1}{2}$.

121. IV. Per trovare il quoziente di due di queste frazioni, bisogna anche ridurre tutto alla più piccola specie, e far questa regola di tre (53); come il divisore all'unità, così il dividendo al quoziente.

Per esempio, per dividere $8^{\circ} 9' 48''$ per 3 giorni 2 ore $5' 19''$, io dico; come 3 giorni 2 ore $5' 19''$, o come 266719" di tempo, sono ad 1 giorno, o a 86400" di tempo, così $8^{\circ} 9' 48''$, o 29388" di grado, sono a $9519'' \frac{2}{3} \frac{2}{5} \frac{1}{7} \frac{1}{9}$, che vagliono $2^{\circ} 38' 39''$, o quasi $40''$.

122. OSSERVAZIONI. I. Quando si deve operare su di misure eterogenee, l'unità, che si prende, dev'essere eterogenea al prodotto, o quoziente cercato.

123. II. Quando uno de' termini dati omogeneo all'unità non va sino alla più piccola specie, basta ridurre l'unità, e questo termine all'ultima specie di questo stesso termine; ma bisogna sempre ridurre il termine eterogeneo all'unità alla sua più piccola specie. Così nel secondo esempio della moltiplicazione, il termine 21. 7 oncie 5 grossi non andando sino a' grani, bastò di ridurre in grossi l'unità, e le 21. 7 oncie 5 grossi, e fare come 128 grossi sono a 317 grossi, così 804d. sono a $1991 \frac{1}{2}$ d.



ELEMENTI D' ALGEBRA.

L'ALGEBRA è un' Arimmetica universale; è ella la scienza della grandezza in generale, come l'Arimmetica è la scienza de' numeri.

Definizioni d' alcuni termini usati in Algebra.

124. Una Espressione Algebraica, o una Quantità Algebraica è una, o più grandezze espresse per una, o più Lettere dell' Alfabeto, queste Lettere sono ordinariamente le minuscole.

125. Una quantità Algebraica può essere *complessa*, o *incomplessa*.

Una quantità *incomplessa* è quella, che è sola, cioè a dire, che non è nè preceduta, nè seguita da alcun' altra quantità congiunta per mezzo del segno +, o separata per mezzo del segno —, così a , ab , acd , $-b$, $-adb$, $3abc$, sono quantità *incomplesse*.

126. Una quantità *complessa* è quella, che è composta di più quantità congiunte, o separate per mezzo di questi segni +, o —. Per esempio, $a+b$, $aa-b+edd$ ec. sono quantità *complesse*.

127. Una quantità *incomplessa* si chiama un *Monomio*. Una quantità *complessa* si chiama un *Polinomio*; e si chiama *Binomio*, *Trinomio*,

E

Qua-

Quadrinomio ec. secondo che ha due, tre, quattro ec. termini.

128. Si chiamano *termini* le parti comprese fra' segni d'un Polinomio : e si chiama *termine positivo* quello, ch' è preceduto dal segno $+$, e *termine negativo* quello, ch' è preceduto dal segno $-$; così la quantità $+a - b + c - dd$ è un quadrinomio, nel quale due termini sono positivi, cioè, $+a$, e $+c$; e due sono negativi, cioè, $-b$, e $-dd$.

* Nell'Aritmetica noi sempre abbiamo considerate le quantità come positive; così nella sottrazione da una quantità maggiore positiva abbiamo tolta una quantità minore anche positiva, ed abbiamo avuto un residuo positivo: onde altra idea non ci è nata per lo segno $-$, se non quella d'una nota di sottrazione. Ma si possono considerar indipendentemente dalla sottrazione le quantità negative, come quantità minori del niente, e le positive, come maggiori del niente. Imperocchè supponga si, che noi avessimo un quantità di averi, per esempio 9; avremo allora $+9$; ma se ne spendiamo 2, poi 3, poi 4, poi 5, poi 1 ec., avremo prima 7, poi 4, poi 0, poi -5 , indi -6 ec. onde le quantità -5 , -6 dinoteranno quantità opposte a' nostri averi, cioè, noteranno i nostri debiti. Si supponga di nuovo una materia, che abbia 10 gradi di calore, questa quantità, se vada scemando può averne successivamente 10 poi 8, poi 4, poi 2, poi 0, indi -2 , -4 , -8 ec. Dunque 0 supposto come il punto intermedio fra' gradi di calore, e quelli di freddo,

do, le quantità -2 , -4 , -8 ec. noteranno i gradi di freddo. Sicchè da una quantità positiva, scemando, si arriva ad altre minori, indi al 0, e poi alle quantità negative, che sono le opposte *.

129. Il primo termine d'una quantità complessa, o il termine d'una quantità incomplessa, non essendo preceduto da alcun segno, è stimato positivo, così $a+b$ sono due termini positivi, perchè è la stessa cosa che $+a+b$.

130. Una cifra, che precede un termine qualunque, per esempio, 3 in questa quantità $3abc$ si chiama *il coefficiente* di questo termine, e significa, che il termine abc è preso tre volte, o moltiplicato per 3. La quantità $ab-3cc+2dd$ ha due coefficienti, cioè, 3 e 2; $-3cc$ significa, che il secondo termine $-cc$ è moltiplicato per 3, e $+2dd$ significa, che il terzo termine $+dd$ è moltiplicato per 2.

* Onde, se sia $b=10$ sarà $3b=3 \times 10=30$. Inoltre, si supponga $3=a$, sarà $3b=ab$. Il perchè siccome $3b$ dinota il prodotto di b per 3, così ab dinota il prodotto di a per b ; e così abc dinoterà il prodotto di a , b , c moltiplicate fra loro: cioè, se $a=3$, $b=10$, $c=5$, sarà $abc=3 \times 10 \times 5=30 \times 5=150$. *

131. Un termine, che non è preceduto da nessun coefficiente, si suppone aver l'unità per coefficiente; così $aa=1aa$.

132. Una cifra posta al di sopra d'una lettera, come 3 in questa espressione a^3 , si
E 2 chia-

chiama un *Esponente*, e significa, che questa lettera dev' essere scritta tante volte di seguito, quante unità contiene quest' esponente. Così a^3 è posto in luogo di aaa ; similmente $a^4 b^3 c^2$ è posto in luogo di $aaaabbbccc$.

Una lettera, che non ha esponente si suppone aver l'unità per esponente. Per esempio, ab è la stessa cosa, che $a^1 b^1$; similmente $a^3 bcc$ è la stessa cosa, che $a^3 b^1 c^2$.

La differenza, che passa tra un coefficiente, e un esponente è sensibile; $4a$ è posto in luogo di $a + a + a + a$, ma a^4 è posto in luogo di $aaaa$. * Onde, se $a = 3$, sarà $4a = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$, ed $a^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$. *

133. I termini d' una quantità complessa formati precisamente colle stesse lettere si chiamano *termini simili*, per qualunque coefficienti, o segni, che abbiano. Per esempio, la quantità $2ab + bd - 2bd + bdd$ ha due termini simili, cioè, $+bd$, e $-2bd$. * E così $+3a^2 b$, e $-4a^2 b$ sono termini simili, perchè sono l'istessa cosa, che $+3aab$, e $-4aab$, che si veggono essere espressi colle stesse lettere; ma $a^2 b$, ed ab^2 non sono termini simili, perchè il primo è l'istesso, che aab , e il secondo è l'istesso, che abb , che si veggono essere espressi con lettere differenti. *

Delle operazioni Algebraiche.

LE Operazioni Algebraiche sono la Riduzione, l'Addizione, la Sottrazione, la Moltiplicazione, e la Divisione.

Del-

Della Riduzione.

134. **L**A Riduzione è l' arte d' ordinare i termini delle quantità Algebriche, e di esprimerle il più semplicemente ch'è possibile, il che bisogna sempre fare dopo qualche operazione.

135. I. REGOLA. *Bisogna, che i termini, o le lettere di ciascun termine guardino, per quanto è possibile, l'ordine alfabetico: così la quantità complessa $ab+c-b+ed-bd-cba$ dev' essere ordinata in questo modo $ab-abc-b+bd+c+de$.*

136. II. REGOLA. *Quando vi sono più termini simili in una espressione, bisogna ridurgli a un solo termine, o cassarli, se si distruggono. Questa Regola racchiude tre casi.*

I. *Tutti i termini simili preceduti dallo stesso segno si riducono a un solo, anche preceduto dallo stesso segno, e da un coefficiente uguale alla somma de' coefficienti di tutti questi termini. Così in luogo di $ab+ab-cd$, si scriverà $2ab-cd$. In luogo di $aa+2ac+3ac$, si scriverà $aa+5ac$; in luogo di $bb-3bc-bc+bd$, si scriverà $bb-4bc+bd$.*

137. II. *Quando i termini simili son preceduti da differenti segni, allora bisogna sottrarre il più piccolo coefficiente dal più gran coefficiente (a).*

E 3

Per

(a) Si soggiunga: e alla differenza di tai coefficienti si prefigga il segno della quantità maggiore. Così avendo questa quantità $7a-3b-4a$, nella quale i termini $7a$, e $-4a$ sono simili, dal più gran coefficiente 7 si levi 4, e messo accanto ad a , s'avrà $3a$; e la data quantità si ridurrà a questa $3a+3b-6a$. Ma se avessimo da ridurre $3a+4b-6a$, si farebbe così, da $-6a$ si levi $3a$, e s'avrà $-3a$ col segno $-$ che avea la quantità $-6a$, ch'era la maggiore. Tutto ciò è chiaro dalle dimostrazioni, che si portano nel §. 138.

tità negative si può avere e 0, e quantità negative nella somma, n. III., e IV. *

Dell' Addizione .

139. **P**ER aggiungere le quantità *Algebraiche*, si scrivono tutte di seguito co' loro stessi segni, e si fanno indi le riduzioni necessarie.

Così per aggiugnere ab a bc , si scrive $ab + bc$. La somma di $ab + c$, e di $b - c$ è $ab + c + b - c$, e riducendo (138) $ab + b$.

La somma di $-b$, e di a è $a - b$.

Per aggiungere $ab - ad + 3bd$ con $ad - bd$, e con $ab - ad + dd$; si scrive $ab - ad + 3bd + ad - bd + ab - ad + dd$; il che si riduce a $2ab - ad + 2bd + dd$.

Della Sottrazione .

140. **L**A Sottrazione si fa, scrivendo accanto alla quantità data quella, che si vuol sottrarre, dopo averne cangiati i segni $+$ in $-$, e i segni $-$ in $+$.

Per esempio, per togliere $b - c$ da $a + c$, si scrive $a + c - b + c$, e si riduce ad (136) $a - b + 2c$.

Per togliere $ab - bc + dd$ da $ab + abb - dd$, bisogna scrivere $ab + abb - dd - ab + bc - dd$, e, riducendo, la differenza è $abb + bc - 2dd$.

141. Per una compensazione necessaria è, che si cangia il segno $-$ in $+$ nella quantità, che si sottrae. Quando per togliere $b - d$ da a si scrivesse subito $a - b$, se ne toglierebbe troppo, perchè b non è una quantità intera, ma smi-
nuita della quantità d ; e tutta la quantità d è il troppo, che si toglie; affinchè dunque la sottrazione sia esatta, bisogna aggiungere alla differenza quello, che n'è stato tolto di troppo;

cioè a dire, che ad $a-b$ bisogna aggiungere d , e scrivere $a-b+d$.

Possiamo convincerci facilmente di questa verità co' numeri: Se io voglio togliere $5-3$ da 6 , secondo questa regola io debbo scrivere $6-5+3$, e riducendo, la differenza è 4 , il che è evidente; imperocchè, se io scriveffi $6-5-3$, toglierei 8 da 6 , il che non è quello, che si propone di fare; perchè $5-3$ essendo $= 2$, da 6 non ne bisogna togliere, che 2 .

* Inoltre, che $-b$ tolto da a faccia $a+b$, si dimostra in varie maniere, 1°. Se da a si toglie $+b$ si avrà $a-b$. Dunque, se facendo un' operazione contraria, da a si toglie $-b$, si avrà un contrario risultato, cioè $a+b$. 2°. La differenza fra due quantità aggiunta alla sottraenda, dev' essere (40) uguale alla sottratta; e però la differenza fra a e $-b$, è $a+b$, perchè $a+b$ manca a $-b$ acciò sia uguale ad a , in fatti $a+b-b=a$ (138).

Della Moltiplicazione.

142. **P**ER moltiplicare due termini Algebratici, bisogna operare sopra quattro cose; sopra i segni, sopra di coefficienti, sopra le lettere, e sopra gli esponenti.

La Regola de' segni è, che *il prodotto degli stessi segni è positivo, quello de' segni differenti è negativo*: così $+\times+=+$, $+\times-= -$, $- \times + = -$, e $- \times - = +$.

La Regola de' coefficienti è *di moltiplicarli l'uno per l'altro*.

La Regola delle lettere è *di scriverle tutte di*

di seguito per ordine alfabetico, senza porre segni fra quelle.

La Regola degli Esponenti è, che, se si deve moltiplicare una lettera che abbia un Esponente, per la stessa lettera, che lo abbia ancora, bisogna scrivere nel prodotto questa lettera una sola volta, ma con un Esponente uguale alla somma de' loro Esponenti.

ESEMPL. Per moltiplicare $4b^2 c$ per $-3dd$, io dico $+ \times - = -$, $4 \times 3 = 12$, $b^2 c \times dd = b^2 cdd$. Dunque il prodotto è $-12b^2 cdd$.

Per moltiplicare $-3bb$ per $-b^3$, io dico $- \times - = +$, $3 \times 1 = 3$, (imperocchè (131) ogni termine, che non ha coefficiente espresso, ne ha uno sottinteso, che è 1); $bb \times b^3$, ovvero $b^2 \times b^3 = b^5$, dunque il prodotto è $+3b^5$, o semplicemente $3b^5$.

Si troverà similmente che . . ,

$$a \times b = ab.$$

$$-bc^3 \times 3b^3 d = -3b^4 c^3 d.$$

$$3aac \times -2bc = -6a^2 bc^2.$$

$a^3 \times a^4 = a^7$. Imperocchè $a^3 = aaa$, ed $a^4 = aaaa$; dunque $a^3 \times a^4 = aaa \times aaaa = aaaaaaa = a^7$. Il che dimostra la regola degli esponenti.

$$abc \times 3a^2 b^3 cd = 3a^3 b^4 cd.$$

$$4a^3 b^5 \times -7a^2 b^3 cd^4 = -28a^5 b^8 cd^4.$$

$$a^m \times a^m = a^{m+m} = a^{2m}; a^m \times a^{-m} = a^{m-m} = a^0; a^0 \times a^m = a^{0+m} = a^m.$$

COROLL. I°. $a^m \times a^0 = a^{m+0} = a^m$. Ma $a^m \times 1 = a^m$. Dunque a^m o si moltiplichi per a^0 , o si moltiplichi per 1, sempre ha l'istesso prodotto a^m , dunque $a^0 = 1$.

II°. $a^m \times a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1$. Ma $a^m \times \frac{1}{a^m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$, dunque a^m o si moltiplichi per a^{-m} , o si mol-

si moltiplichi per $\frac{1}{a^m}$, sempre ha l'istesso prodotto 1; dunque $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

143. La moltiplicazione de' polinomj si fa, come nell'Aritmetica ordinaria, trovando i prodotti parziali di ciascun termine, secondo le regole prescritte quì sopra [142], e prendendo la somma di questi prodotti, per lo prodotto totale. Tutta la differenza, che passa tra la Moltiplicazione de' numeri, e quella de' polinomj è, che in questa non è necessario seguire l'ordine de' termini, ma basta, che si abbia la somma de' prodotti di ciascun termine del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore.

Per esempio, per
 moltiplicare $a + 3c - d$
 $3c - d$ per $2a - d$,
 io dispongo questi
 termini come nell'
 Aritmetica [47],
 moltiplico prima
 a per $2a$, il prodotto è $2aa$; indi $+3c$ per $2a$,
 il prodotto è $+6ac$; poi $-d$ per $2a$, il prodotto
 è $-2ad$. Passo al secondo termine del moltiplicatore, e moltiplico a per $-d$, il prodotto
 è $-ad$; moltiplico $+3c$ per $-d$, il prodotto
 è $-3cd$; infine io moltiplico $-d$ per $-d$, il
 prodotto è $+dd$; aggiungo tutti questi prodotti
 insieme, ed avendo fatta la riduzione, ho il
 prodotto totale $= 2aa + 6ac - 3ad - 3cd + dd$. Altri Esempj.

$$a^3 - 3ab^2 + b^3$$

$$aab - b^3$$

$$a^3 - 3ab^2 + b^3$$

$$-a^3 + 3ab^2 - b^3$$

$$2a - 2b$$

$$2a + 2b$$

$$4aa - 4ab$$

$$+ 4ab - 4bb$$

$$\text{Rid. } 4aa - 4bb$$

$$aa + 2ac - bc$$

$$a - b$$

$$a^3 + 2aac - abc$$

$$-aab - 2abc + bbc$$

$$a^3 - aab + 2aac - 3abc + bbc$$

144. OSS. I. Accade sovente, che, per evitare la confusione delle lettere nella moltiplicazione de' termini complessi, ci contentiamo di scrivere il segno $\times$ tra il moltiplicando, e'l moltiplicatore, ciascuno de' quali si copre con una linea. Per esempio, per esprimere il prodotto di $a + 3c - dd$ per $bb - bdd$, si scrive $a + 3c - dd \times bb - dd$. Altri gli scrivono senza congiungergli col segno $\times$, ma chiusi fra due parentesi, in questo modo $(a + 3c - dd)(bb - bdd)$. Altri infine si servono d'altre espressioni, che s'imparano coll'uso.

145. II. Dimostrazione della Regola de' segni. Bisogna dimostrare perche $+\times = -$, e perche $-\times = +$.

1°. Quando per moltiplicare a per $b - c$ si scrive prima il prodotto di a per b , che è ab , è chiaro, che questo prodotto è troppo grande, imperocchè b non è una quantità intera, ma sminuita della quantità c . Dunque la quan-

tà

rità c entra di troppo nel prodotto ab tante volte, quante vi entra la quantità b . Intanto a esprime quante volte b entra nel prodotto ab [$*$ imperocchè se $a=4$, sarà $ab=4b$, onde 4 , cioè a esprime, che b entra nel prodotto $4b$, cioè ab , quattro volte, o il numero $a *$], dunque ne bisogna togliere c tante volte, quante unità contiene a ; o, ciò ch'è lo stesso, bisogna toglierne $c \times$, o sia ac . Dunque il prodotto di a per $b - c$ è $ab - ac$.

Per mezzo de' numeri. Quando per moltiplicare 5 per $6 - 4$, si dice prima $5 \times 6 = 30$, questo prodotto 30 è troppo grande; imperocchè $6 - 4$ non vale altro che 2 : ed è troppo grande per questo, perchè ci si fa entrare 5 volte il numero 4 , ch'è tolto da 6 . Dunque per aver un prodotto giusto bisogna da 30 togliere 5 volte 4 , cioè a dire 20 , e il resto 10 è il vero prodotto; dunque per iscrivere il prodotto di 5 per $6 - 4$, bisogna porre $30 - 20$.

2°. Quando si moltiplica $a - b$ per $c - d$, egli è chiaro, che il primo prodotto di questa moltiplicazione, cioè $a - bc$, è troppo grande, perchè c è sminuita della quantità d ; bisogna dunque da questo prodotto $ac - bc$ togliere tante volte d , quante volte vi entra c : imperocchè $a - b$ nota quante volte c è entrata nel prodotto $ac - bc$; dunque bisogna toglierne d moltiplicata per $a - b$; cioè a dire, bisogna togliere $ad - bd$ da $ac - bc$; ma [140] per togliere $ad - bd$ da $ac - bc$, bisogna scrivere $ac - bc - ad + bd$; dunque nella moltiplicazione di $a - b$ per $c - d$, il prodotto di $-b$ per $-d$, deve per compensazione essere $+bd$. Se

Se in luogo di a , b , c , d , si pongano i numeri, come 6, 4, 7, 3, si farà la stessa dimostrazione sopra questi numeri.

* Di più, poichè $+a \times +b = ab$, dunque per un operazione contraria $+a \times -b = -ab$, che è un risultato contrario al primo.

E da ciò, essendo $-b \times +a = -ab$, per un operazione contraria $-b \times -a = +ab$.

Inoltre moltiplicar $+a$ per $-b$ si è prendere la quantità a negativamente tante volte, quante unità sono in b ; ma la quantità a presa tante volte quante unità sono in b è $=ab$, e presa negativamente è uguale a $-ab$. Dunque $+a \times -b = -ab$.

Infine moltiplicar $-a$ per $-b$ è prendere la quantità negativa a negativamente tante volte, quante unità sono in b ; ma prendere una quantità negativa negativamente è l'istesso, che negar una negazione, cioè, affermare: dunque prendere $-a$ negativamente tante volte, quante unità sono in b è l'istesso, che affermare il prodotto ab ; dunque $-a \times -b = +ab$ *.

Della Divisione.

146. **L** *A Divisione algebrica si fa in generale mettendo il dividendo sopra del divisore, e separandoli per mezzo d'una linea. Così l'espressione*

$$ne \frac{a - bb + cc}{3ac + dd}$$

rappresenta il quoziente di $a - bb + cc$ *diviso per* $3ac + dd$. *Onde si vede, che dividere due espressioni algebriche non è altro, che metterle in forma di frazioni ordinarie.*

Ma comechè bisogna sempre ridurre le fra-
 zio-

zioni all'espressione la più semplice, si può; come nella moltiplicazione, dar, per la divisione di due termini algebratici, quattro regole particolari.

I. La Regola de' segni è, che il quoziente di due termini, che hanno uno stesso segno, è positivo: e che il quoziente di due termini, che hanno segni differenti, è negativo.

II. La Regola de' coefficienti è, che, se si possono dividere senza resto l'uno per l'altro, bisogna cassarli tutti due, e mettere il loro quoziente in luogo del più gran coefficiente; che, se non sono divisibili senza resto, bisogna lasciarli in frazione tali quali sono; che infine, se sono uguali, bisogna cassarli.

III. La Regola delle lettere è, di scrivere quelle del dividendo al di sopra di quelle del divisore, separandole per mezzo d'una linea.

IV. La Regola degli esponenti è, quando una stessa lettera si trova con esponenti differenti nel dividendo, e nel divisore, si cassa nel termine, dove ella ha l'esponente più piccolo, o pure, se ella vi sta sola bisogna mettere 1 in suo luogo, e nell'altro termine si lascia per esponente la differenza di questi esponenti: di modo che, se questi esponenti fossero uguali, si casserebbero interamente queste lettere in ciascun termine, o pure si metterebbe 1 in loro luogo, se non vi fossero altre lettere in questi termini.

Questa Regola ha luogo anche, quando la lettera non avesse esponenti, perchè allora (132) il suo esponente è 1.

ESEMPL. Per dividere $4ac^3 des$ per $-2bd^3 es f$,
io

io dico $\frac{+}{-} = -$, $\frac{4}{2} = 2$, scrivo indi $-\frac{ac^3 dc^3}{bd^3 e^3 f}$ 79

vedo, che, secondo la regola degli esponenti, devo togliere d nel dividendo, e lasciar d^2 , o dd nel divisore: poi cassare e^2 , nel divisore, e lasciar e^3 , o ee nel dividendo, di sorte che il

risultato, o il quoziente è $-\frac{2ac^3 ee}{bddf}$.

Per dividere $3a^3$ per $-12a^4 b^3$, io dico $\frac{+}{-} = -$, $\frac{12}{3} = 4$, casso 3 nel dividendo, e pon-

go 4 in luogo di 12 nel divisore, scrivo dunque $-\frac{a^3}{4a^4 b^3}$; poi veggo, che, secondo la re-

gola degli esponenti bisogna porre 1 in luogo di a^3 nel dividendo, e lasciare a^1 , o a solamente nel divisore. Così il quoziente è $-\frac{1}{4ab^3}$.

Si troverà similmente, che $\frac{3abc}{3abc} = \frac{1}{1} = 1$; che

$\frac{-4bd}{2bd} = -\frac{2}{1} = -2$; che $\frac{3abc}{3aab} = \frac{1}{3ab}$; che

$-\frac{12abd}{4a^2 bbd} = -\frac{3a}{a^4} = -\frac{3}{a^3}$; che $\frac{5ac}{aab} = \frac{5c}{a^2} = \frac{5}{a^2} = aab$; ec.

* Oss. Dunque $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$;

$\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2}$;

$\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0$;

a^m

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1. \quad (a)$$

COR. I°. $a^0 = 1$. Imperocchè $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$

[off.]; ma $\frac{a^m}{a^m} = 1$ [146]. Dunque $a^0 = 1$.

Il. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. Imperocchè, essendo $a^0 = 1$ (cor. I.),

farà $\frac{1}{a^m} = \frac{a^0}{a^m}$; ma $\frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}$ (Offer.),

Dunque $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

147. La Regola de' coefficienti e quella degli

(a) Le quantità, che hanno per esponente una frazione, come $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, ec. disegnano la radice di quella potenza, che è dinotata dal denominatore della frazione: così $a^{\frac{1}{2}}$ disegna la radice seconda di a ; $a^{\frac{1}{3}}$ la radice terza: $a^{\frac{1}{4}}$ la radice quarta di a , ec. queste quantità si chiamano *potenze imperfette*, e significano lo stesso, che $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, ec. i quali segni si chiamano *Radicali*.

Le quantità, che hanno l'esponente col segno negativo, come a^{-1} , a^{-2} , a^{-3} , a^{-4} , significano l'*unità divisa per lo dato esponente*. Così a^{-1} è lo stesso, che $\frac{1}{a}$; a^{-2} lo stesso, che $\frac{1}{aa}$; a^{-3} lo stesso, che $\frac{1}{aaa}$. (§. 142, cor. II. e §. 146, cor. II.); Queste quantità si chiamano *potenze negative*.

gli esponenti non sono altro, che la riduzione delle frazioni all' espressione la più semplice. Quella degli esponenti è fondata sopra questo, che, quando una stessa quantità si trova nel dividendo, e nel divisore, il loro quoziente è 1 (76), o, se si vuole, può ridursi ad $\frac{1}{1}$. Così $\frac{a^3}{a^5}$ essendo la stessa cosa, che $\frac{aaa}{aaa \times aa}$, egli è

chiaro (76), che essendo $\frac{aaa}{aaa} = 1$, si può scri-

vere $\frac{1}{\cancel{aaa} \times aa}$, o semplicemente $\frac{1}{aa}$, o $\frac{1}{a^2}$. Onde si vede, che questa riduzione esigge, che si lasci la differenza degli esponenti nella lettera, il cui esponente è più grande, e che si sostituisca 1 in quella, che ha l'esponente più piccolo.

* L'istessa regola è pur fondata sopra quest' altro, che quando i due termini d'una frazione hanno un divisore comune, si riduce la frazione alla più semplice espressione con dividere i termini per questo divisore [85]. E così, perchè i due termini della frazione

$\frac{4a^3b^3}{a^3}$ hanno per comun divisore a^3 , si ha ,
dividendo il numeratore, e'l denominatore per a^3 ,

$\frac{4a^3b^3}{a^3} = \frac{4ab^3}{1}$
148. Queste regole, o riduzioni si possono applicare alle frazioni de' Polinomj, quando si trova una, o più quantità istesse in tutt' i termini tanto del divisore, quanto del dividendo.

F

Così

Così $\frac{ax - 2abx}{ax + axx}$ si riduce ad $\frac{1 - 2b}{1 + x}$, cassando ax in tutt' i termini, e mettendo 1 in sua vece in que' termini, ne' quali si trova solo.

Similmente $\frac{4a^2xx + 3a^2bbxx}{ax - 2abx}$ si riduce a $\frac{4x + 3abb}{1 - b}$

Questa $\frac{4abxx - 2ab}{2abb + 4abb}$ si riduce a $\frac{2xx - 1}{ab + 2b}$.

* Le quali operazioni si fanno con dividere il numeratore, e 'l denominatore per lo divisore comune.

Oss. Il divisore comune delle quantità semplici si trova facilmente. Per le quantità composte bisogna osservare, che una stessa lettera, o anche un prodotto di più lettere, che si trova in molti termini consecutivi fa un prodotto colla somma di tutte le altre lettere, o coefficienti, che sono in questi termini, e per conseguenza ne è un divisore.

Così nel primo esempio $\frac{ax - 2abx}{ax + axx}$, la quantità,

o sia il prodotto ax , che si trova ne' due termini $ax - 2abx$ del dividendo fa un prodotto colla somma di $1 - 2b$, e nel divisore fa un prodotto colla somma $1 + x$, onde ne è il comune divisore [vedete n. 222.] *

149. Si dividono anche i Polinomj come nell' Arimmetica ordinaria, e comechè rare volte accade, che questa divisione si possa fare, bisogna non pertanto provarla prima di contentarsi di far solamente alcuna delle riduzioni precedenti. L' uso imparerà a conoscere facilmente, quan-

quando un Polinomio si può dividere esattamente per un altro. Eccone un esempio.

Si voglia sapere, se $aa+ab+ac+bc$ si possa dividere per $a+c$; ordino prima il tutto, secondo il solito, e dico in primo luogo aa , primo termine del dividendo, diviso per a , primo termine del divisore, ha per quoziente a ; imperocchè

$$\begin{array}{r}
 aa+ab+ac+bc \\
 \hline
 a+c \\
 aa+ac \\
 \hline
 \text{rest. } ab+bc \\
 \hline
 ab+bc \\
 \hline
 \text{resto } 0
 \end{array}
 = a+b$$

(148) $\frac{aa}{a} = a$; pongo a nel quoziente; moltiplico il divisore $a+c$ per lo quoziente trovato a ; e tolgo dal dividendo il prodotto $aa+ac$; fatta la riduzione, resta $ab+bc$; dico dunque $\frac{+}{+} = +$, indi $\frac{ab}{a} = b$, pongo $+b$ nel quoziente, moltiplico il divisore $+b$, e tolgo il prodotto $ab+bc$ dal resto; fatta la riduzione non resta più niente, il che dinota, che il quoziente cercato è $a+b$ [a].

F 2

Del-

(a) S'avverta 1°. che la lettera a del divisore composto, per cui s'è cominciata la divisione non si può più cambiare nel proseguimento dell'operazione. Si poteva però sceglierne un'altra da principio a piacere, e di quella servirsi egualmente, perchè si sarebbe avuto il medesimo quoziente. Così se in vece di a si fosse scelta c , il quoziente nato da questa divisione pur sarebbe stato $a+b$, come si vedrà facilmente facendo la divisione per la lettera c .

a°. Se

150. **U**Na quantità qualunque può essere considerata 1°. come esprime il valore di qualche cosa sola; 2°. come la somma, o il prodotto di più altre quantità; 3°. come la differenza, o il quoziente di più quantità: così 12 può esser considerato, o come significante semplicemente 12 cose, o come la somma di 3+9, o di 2+10, o di 4+8 ec., o pur come il prodotto di 3×4, o di 2×6 ec., o anche come la differenza di 15 a 3, o di 17 a 5, ec. o come il quoziente di $\frac{24}{2}$, o di $\frac{36}{3}$ ec.

Il principale oggetto delle Matematiche, è di paragonar le quantità fra di loro, di comporre, e di scomporre.

Parleremo in appresso della Comparazione delle quantità.

151. Egli è ordinariamente facile di comporre una quantità da più altre, perchè ciò si fa per mezzo della moltiplicazione, o dell'addizione, che sono due operazioni sempre suscettibili d'esattezza ne' loro risultati; ma egli è difficile, e sovente impossibile di scomporre una quantità, sopra tutto quando vogliamo valu-

2°. Se dopo fatta la divisione s'avesse un resto, questo si dovrebbe esprimere col suo segno +, o - dopo il quoziente a modo di frazione, come si fa nell'aritmetica volgare. Così dividendo $xx + 4x - 17$ per $x - 2$, s'avrebbe per quoziente $xx + 2x + 8$, e s'avrebbe anco un resto -1 , che s'aggiugnerebbe al quoziente, così $-\frac{1}{x-2}$; onde il quoziente sarebbe $xx + 2x + 8 - \frac{1}{x-2}$.

lutarla in numeri interi, perchè ciò si fa principalmente per mezzo della divisione, che dà rarissime volte quozienti senza resto.

152. Una quantità qualunque a , che si riguarda come semplice, e non composta, si chiama una quantità *del primo grado*, o che è nella sua *prima potenza*. Ma, se si moltiplica questa quantità per se stessa una volta, due volte, tre volte ec. il suo prodotto diviene una quantità *del secondo, terzo, quarto ec. grado*; ovvero si dice, che ella è elevata alla seconda, terza, quarta ec. potenza. In generale il prodotto diviene una quantità d'un grado, o d'una potenza espressa dall'esponente, che risulta da questa moltiplicazione. Così aa , o a^2 considerata come il prodotto di $a \times a$, si chiama il secondo grado, o la seconda potenza di a . Similmente a^4 , come il prodotto di $a \times a \times a \times a$, è la quarta potenza di a .

153. La quantità semplice, o stimata semplice, che si è poi elevata a potenza, si chiama *radice* di questa potenza. Per esempio, a è la radice terza di a^3 , la radice settima di a^7 , ec. Similmente il numero 20736 essendo la quarta potenza di 12, la radice quarta di 20736 è 12.

154. Per analogia alle dimensioni de' corpi, la seconda potenza d'una quantità, come b^2 si chiama *il quadrato* di b ; la terza potenza b^3 , si chiama *il cubo* di b ; altre volte b^4 si chiamava *il quadrato—quadrato*, b^5 *il quadrato—cubo*, b^6 *il cubo—cubo* ec.; e reciprocamente b si chiama la radice quadrata di bb , o di b^2 , la radice cubica di b^3 , la radice quadrato—quadrata di b^4 ec.

155. La composizione, e la scomposizione delle quantità si riducono a quattro cose. 1°. A formare una sola quantità di più altre: questa è la pratica dell'addizione, e della moltiplicazione. 2°. A trovar tutte le quantità, delle quali una quantità data è il multiplo, o ciò che si riduce allo stesso, a trovar tutti i divisori, che possono dividere esattamente, e senza resto una quantità data. 3°. ad elevar una quantità qualunque a una potenza data. 4°. Ad estrarre una radice qualunque da una quantità data, e che si riguarda come potenza di questa radice.

Per trovare tutti i divisori d' una quantità data.

156. 1°. **S**E la quantità data è un numero, bisogna provare di dividerla successivamente per tutti i numeri primi, ec. fino a tanto, che si trovi un quoziente giusto; bisogna indi provar di dividere questo primo quoziente ancora per alcuni de' numeri primi, finchè si trovi un secondo quoziente giusto, che si procurerà di dividere per gli stessi numeri, finchè in ultimo si trovi un quoziente, che sia l'unità, cioè a dire fino a tanto, che non si trovi altro divisore più piccolo dell'ultimo quoziente. Avendo scritti tutti i divisori, de' quali ci saremo serviti, gli moltiplicheremo due a due, tre a tre, quattro a quattro ec., e i prodotti unitamente con questi divisori saranno tutti i divisori del numero proposto.

ESEMPIO. Si domandano tutti i divisori del numero 630. Io gli divido per due, il primo quoziente è 315, che non posso più dividere per
2, ma

2, ma per 3, il secondo quoziente è 105; questo posso ancora dividere per 3; il terzo quoziente è 35, che non posso dividere nè per 2, nè per 3, ma per 5, il quarto quoziente è 7.

Io non posso dividere questo quoziente per 2, 3, 5, ma per 7, e l'ultimo quoziente è 1. I divisori de' quali io mi son servito, sono dunque 2, 3, 3, 5, 7. Io gli moltiplico due a due, $2 \times 3 = 6$, $2 \times 5 = 10$, $2 \times 7 = 14$, $3 \times 3 = 9$, $3 \times 5 = 15$, $3 \times 7 = 21$, $5 \times 7 = 35$. Dipoi tre a tre, $2 \times 3 \times 3 = 18$, $2 \times 3 \times 5 = 30$, $2 \times 3 \times 7 = 42$, $2 \times 3 \times 7 = 70$, $3 \times 3 \times 5 = 45$, $3 \times 3 \times 7 = 63$, $3 \times 5 \times 7 = 105$. Indi quattro a quattro, $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$, $2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126$, $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$, $3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$. Infine, cinque a cinque $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 630$. Tutti i divisori sono dunque, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 14, 15, 18, 21, 30, 35, 42, 45, 63, 70, 90, 105, 126, 210, 315, 630.

La ragione ne è semplice. Poichè il numero proposto è uguale al prodotto de' cinque divisori $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$, egli è chiaro, che in questo numero sonovi rinchiusi tutti i prodotti possibili di due, tre, o quattro ec. di questi divisori (a).

F 4

II.

(a) E in fatti scegliendo ad arbitrio qualunque prodotti di questi numeri 2, 3, 3, 5, 7, e moltiplicandoli fra di loro, sempre s'avrà il medesimo risultato 630. Così si moltiplichino 3 per 5, poi per 7, s'avrà per prodotto 105; poi si moltiplichino 2, e 3 (che sono gli altri due divisori, che restano) e s'avrà 6: si moltiplichino ora questi due prodotti 6, e 105, e s'avrà 630. Si combinino d'altra maniera, e si faccia così $2 \times 7 = 14$: indi $3 \times 3 \times 5 = 45$: poscia si moltiplichino questi due prodotti 14, e 45, e pure s'avrà il medesimo risultato 630. Lo stesso accaderà, se si prendono 3 prodotti.

II. E la stessa cosa è per le quantità algebriche. Si domandano, per esempio, tutti i divisori di $b b d d + b^3 d$. Io divido dapprima per b , ed ho il primo quoziente $b d d + b b d$, lo divido ancora per b , ed ho il secondo quoziente $d d + b d$, di nuovo lo divido per $b + d$, ed ho il terzo quoziente d , in fine lo divido per d , ed ho 1 per l'ultimo quoziente. I divisori di cui mi son servito son dunque, b , b , $b + d$, d , io gli moltiplico due a due, ed ho $b b$, $b b + b d$, $b d$, $b d + d d$; poi tre a tre, ed ho $b^3 + b b d$, $b b d + b d d$, $b b d$; infine quattro a quattro, ed ho $b^3 d + b b d d$. Dunque tutti i divisori sono 1 , b , $b + d$, d , $b b$, $b b d$, $b d$, $b b + b d$, $b d + d d$, $b^3 + b b d$, $b b d + b d d$, $b^3 d + b b d d$.

Per Elevare le Quantità a potenze date.

157. **P**Oichè la prima potenza di a è a , o sia a^1 , o sia a che non è moltiplicata; che la seconda è a^2 o sia $a \times a$; la terza potenza è a^3 , o sia $a \times a \times a$, la quarta potenza è a^4 , o sia $a \times a \times a \times a$ ec. e se ne può trarre questa Regola generale.

158. *Per elevare una quantità ad una potenza qualunque data, bisogna moltiplicarla per se stessa tante volte meno uno, quante unità contiene l'esponente di quella potenza.*

Così per elevare 9 alla terza potenza bisogna moltiplicarlo due volte per se stesso, in dicendo $9 \times 9 = 81$, $81 \times 9 = 729$.

Similmente il quadrato di $\frac{1}{2}$ è $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; il suo cubo è $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; la sua quarta potenza è $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ ec.

Il quadrato di $\frac{1}{10}$ è $\frac{1}{100}$, il cubo è $\frac{1}{1000}$, la sua quarta potenza è $\frac{1}{10000}$ ec.

159. Onde si vede, che la potenza d' una frazione diviene una quantità tanto più piccola riguardo alla stessa potenza dell' unità, quanto questa frazione è una più piccola parte dell' unità; e quanto il grado, al quale si eleva è più grande.

Ma poichè nelle quantità algebriche basta ordinariamente d' indicare queste potenze, senza fare moltiplicazioni attuali, bisogna servirsi della maniera seguente.

160. I^o. Per elevare un monomio ad una potenza qualunque, bisogna mettere l' esponente di questa potenza a tutte le sue lettere. Così la quinta potenza

di abc è $a^5 b^5 c^5$. La potenza m di $\frac{ab}{cd}$ è $\frac{a^m b^m}{c^m d^m}$.

Il cubo di $\frac{2ab}{5fg}$ è $\frac{8a^3 b^3}{125 f^3 g^3}$

Imperocchè $\frac{2ab}{5fg} \times \frac{2ab}{5fg} = \frac{4aabb}{25ffgg}$, e $\frac{4aabb}{25ffgg} \times \frac{2ab}{5fg} = \frac{8a^3 b^3}{125 f^3 g^3}$.

161. II^o. Se si trovano nella quantità data delle lettere, che abbiano di già gli esponenti, bisogna moltiplicargli per l' esponente della potenza, alla quale si vuol elevare questa quantità. Così per elevare $a^3 b^2$ alla quarta potenza, bisogna mettere $a^{3 \cdot 4} b^{2 \cdot 4} = a^{12} b^8$.

In generale una potenza m di $\frac{a^3 b^n}{cdq}$ è $\frac{a^{3m} b^{nm}}{c^m d^m q^m}$.

162. III^o. Per indicare, che un polinomio è elevato ad una potenza qualunque si copre con una linea orizzontale, all' estremità della quale si scrive l' esponente. Co-

— — — m

Così questa espressione $aa - bc$ dinota la potenza m del binomio $aa - bc$. Altri scrivono così $(aa - bc)^m$.

Egli è frattanto necessario di esaminar la natura delle potenze de' polimonj, e sopra tutto de' loro quadrati, e de' loro cubi.

163. Se dunque si eleva al quadrato la quantità $a + b$, ovvero $-a - b$, si trova $aa + 2ab + bb$; e, se si eleva $a - b$, ovvero $-a + b$, si trova $aa - 2ab + bb$. Donde segue, che il quadrato d' un binomio è composto del quadrato del primo termine, del quadrato del secondo termine, e del prodotto del doppio del primo termine moltiplicato per lo secondo.

E che, se i due termini hanno lo stesso segno tutte le parti del quadrato sono positive; e, se i due termini hanno segni differenti, il prodotto del doppio del primo per lo secondo è negativo.

164. 2°. In elevando un binomio qualunque al cubo, per esempio, $a + b$ si troverà $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$. Il che fa vedere, che il cubo d' un binomio qualunque è composto da' cubi de' due suoi termini, e da' prodotti di 3 volte il quadrato di ciascun termine per l' altro.

In fine in elevando un polinomio similmente a tutte le potenze successive, si osserverà facilmente di che ciascuno è composto.

Delle differenti espressioni delle potenze, e delle radici.

165. **S**I concepisce facilmente, che una quantità come a è elevata a tante potenze successive, quan-

quante unità s'aggiungono al suo esponente. Così a essendo la prima potenza; a^{1+1} , o sia a^2 è la seconda potenza; a^{2+1} , o sia a^3 è la terza; a^{3+1} , o sia a^4 è la quarta potenza.

Generalizzando quest'idea si vede, che una quantità può avere tante potenze possibili, quanti vi sono esponenti possibili, cioè numeri possibili, siano interi, siano rotti, siano positivi, o negativi. E benchè da prima non si abbia idea chiara, che delle potenze, il cui esponente sia un numero intero, come la potenza a^m ; frattanto si vede, che si può

immaginare $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{-\frac{m}{n}}$, $a^{\frac{m}{n}}$, e similmente a^0 : ciò che deve formare tante differenti specie di potenze, di cui si può conoscere la natura rapportandole all'espressione $a^m (a)$.

166. I^o: Per ridurre a^0 all'espressione a^m , io veggio facilmente, che bisogna moltiplicare a^0 per a^m ; imperocchè il prodotto è (142) $a^{0+m} = a^m$. Dunque a^0 è un moltiplicatore, che non aumenta, nè diminuisce, il che non compete, che all'unità.

Dunque $a^0 = 1$. Altrimenti; $a^0 = a^{m-m}$, ma (146) $a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$. Dunque $a^0 = 1$. (Vedete

i num. 142. 146.) Dunque in generale una quantità qualunque elevata alla potenza zero non è altra cosa, che l'unità.

167. II^o. Per ridurre $a^{\frac{m}{n}}$ all'espressione a^m io

(a) Nella nota dopo il §. 146. s'osservò, che

queste potenze $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{-\frac{m}{n}}$, e $a^{\frac{m}{n}}$ erano tante specie di potenze differenti; se ne accennarono le diverse espressioni, e le diverse loro denominazioni, ora si viene più precisamente a spiegarne la diversa natura.

veggo, che bisogna elevare l'espressione $a^{\frac{m}{n}}$ alla potenza n , cioè, che si fa in moltiplicando (161)

l'esponente $\frac{m}{n}$ per n , imperocchè allora io ho
 $a^{\frac{m \cdot n}{n}} = a^{\frac{m \cdot n}{1}} = a^m$.

Dunque a^m è la potenza n di $a^{\frac{m}{n}}$, dunque $a^{\frac{m}{n}}$ è la radice n di a^m , o sia $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. (n.173.)

Dunque in generale una quantità qualunque elevata ad una potenza frazionaria non è altra cosa, che la radice d'una potenza il cui esponente è il numeratore della frazione, e'l denominatore è l'esponente della radice.

Così $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, ed $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$ ec.

168. III°. Per ridurre a^{-m} all'espressione a^m , io veggo, che bisogna moltiplicare a^{-m} , per a^{2m} , imperocchè allora $a^{2m-m} = a^m$.

Dunque (56) $\frac{a^{2m}}{a^{2m}} = a^m$.

Ma $\frac{a^m}{a^{2m}} = \frac{1}{a^m}$, dunque $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (n.42.146.)

Dunque in generale. Una quantità elevata ad una potenza, il cui esponente è un numero intero negativo, non è altra cosa, che l'unità divisa per la potenza positiva di questa quantità.

* Così $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $ab^{-5} = \frac{a}{b^5}$ ec. imperocchè $ab^{-5} = a \times b^{-5} = a \times \frac{1}{b^5} = \frac{a}{b^5}$.

169. IV°. In fine si vede da tutto ciò, che 93

$$- \frac{m}{n} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a).$$

170. COROLL. I. Egli è facile di scambiare l'espressioni delle radici (che si chiamano radicali) in espressioni di potenze, ovvero similmente in altre espressioni radicali equivalenti: per esempio, si

vede facilmente, che $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{\frac{a^1}{b^1}}$ ec.

$$* \text{ Imperocchè } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} : \text{ ma } \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} (173) = a^{\frac{1}{n}}$$

(95); e similmente $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$. (Vedete n. 173.) *

171. COROLL. II. Si può operare sull'espressioni delle potenze, e delle radici nello stesso modo, che s'è operato sopra i numeri interi, o rotti.

172. Per lo termine semplice di potenza noi intenderemo sempre in avvenire quella, il cui esponente è un numero intero positivo: per quello di po-

(a) Poichè $a^{-\frac{m}{n}}$ è lo stesso, che $a^{\frac{-m}{n}}$ (146. cor. II°.); ma $-m$ è diviso per n , dunque l'espressio-

$$- \frac{m}{n} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}}$$

ne a equivale ad a : ma una potenza frazionaria esprime la radice di quella potenza (not. al §. 146).

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}}$$

Dunque finalmente $a^{\frac{m}{n}}$ equivale a $\sqrt[n]{a^m}$.

potenza negativa, quella il cui esponente è un numero intero negativo: per quello di potenza frazionaria, quella il cui esponente è una frazione, della quale il valore è positivo; e per quello di potenza frazionaria negativa, quella il cui esponente è una frazione, della quale il valore è negativo. Per lo termine di potenza perfetta, quella, la cui radice può esser espressa per un numero intero, o rotto, positivo, o negativo; e per quello di potenza imperfetta, quella la cui radice non può esser espressa esattamente per un numero assegnabile: si vedrà in appresso, che la maggior parte de' numeri sono potenze imperfette.

Della Estrazione delle Radici.

173. 1°. **P**ER estrarre una radice qualunque da un monomio, bisogna dividere l'esponente di ciascuna lettera di questo monomio per l'esponente della radice.

Questa operazione rende frazionario l'esponente di questa lettera; ma, se questa frazione si può ridurre ad un intero l'estrazione della radice è perfetta: se nò, non è, che indicata.

Per esempio, per aver la radice quadrata di $a^2 b^6$, bisogna scrivere $a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{6}{2}}$, e riducendo si ha la vera radice cercata ab^3 . Imperocchè $ab^3 \times ab^3 = a^2 b^6$ (142).

Per aver la radice cubica di $a^6 b$, bisogna scrivere $a^{\frac{6}{3}} b^{\frac{1}{3}}$, e riducendo $a^2 b^{\frac{1}{3}}$, che non dà un'estrazione perfetta che in parte.

$$\text{In generale la radice } m \text{ di } \frac{a^p b^q}{c^d n} \text{ è } \frac{a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}}{c^{\frac{d}{m}} n^{\frac{n}{m}}}.$$

Imperocchè questa espressione (167) è la stessa

m_{aPbq}

sa cosa, che $\sqrt[n]{cd^n}$.

* Similmente . . .

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \times \frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{n} \times \frac{m}{n}} = a^{\frac{pm}{n}} = \sqrt[n]{a^{pm}}$$

$$\sqrt[m]{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{p}{mq}} = a^{\frac{p}{n} \times \frac{m}{q}} = a^{\frac{pm}{qn}} = \sqrt[n]{a^{\frac{pm}{q}}}$$

174. II°. Se il monomio ha un coefficiente, bisogna estrarne la radice secondo le regole, che si daranno per li numeri.

175. III°. Per estrarre la radice d'un Polinomio bisogna, che questo Polinomio, sia realmente una potenza di questa radice, ciò che è assai raro; e per questo basta sovente indicare questa estrazione scrivendo questo Polinomio coperto da una linea dopo il segno radicale $\sqrt{}$, tra le gambe del quale si mette l'esponente della radice; o pure si scrive all'estremità della linea, che copre que-

sta.

sto Polinomio, la potenza frazionaria, che ne esprime la radice. Così per dinotar la radice quadrata di $aa-bb$,

Si scrive $\sqrt{aa-bb}$, ovvero $aa-bb^{\frac{1}{2}}$. Per indicare la radice cubica del Polinomio $aa-3b+c$

si scrive $\sqrt[3]{aa-3b+c}$, o pure $aa-3b+c^{\frac{1}{3}}$, ovvero $cc-dd^{\frac{1}{3}}$

vero $\frac{aa-3b+c}{cc-dd^{\frac{1}{3}}}$, ovvero $\left(\frac{aa-3b+c}{cc-dd}\right)^{\frac{1}{3}}$, ovvero $\frac{(aa-3b+c)^{\frac{1}{3}}}{(cc-dd)^{\frac{1}{3}}}$.

176. Quando uno è versato ne' calcoli Algebraici vede facilmente, se un Polinomio è una potenza perfetta della radice, che si vuole estrarre; e per conseguenza, se bisogna realmente estrarre questa radice, o contentarsi d'indicarla: ecco il metodo, che bisogna seguire per provare d'estrarre la radice quadrata d'un Polinomio.

177. Sia dato il Polinomio $aa+2ax+xx$, ecco come io ragiono. Poichè questa quantità è un Polinomio, la sua radice ha più d'un termine. Supponghiamo, che ella ne abbia due, in questa quantità deve esservi (163) il quadrato del

del primo termine , il quadrato del secondo ,
e 'l prodotto del secondo pel doppio del primo.
Vi offervo in primo luogo un quadrato aa , ne
prendo la radice a (173), ed ho il primo de' termini
ch' io cerco , scrivo a da parte , e tolgo il
suo quadrato aa dalla quantità data , restano
 $2ax+xx$. Io dico poi , in questo resto deve
esservi un pro-
dotto del dop-
pio di a per l'
altro termine
della radice ch'
io cerco : non
posso dunque
aver questo al-
tro termine, che
in dividendo
questo resto

$$aa+2ax+xx \quad (a+x. \text{ Rad.}$$

$$-aa$$

$$+2ax+xx$$

$$2a+x$$

$$x$$

$$2ax+xx$$

$$-2ax-xx$$

0

$2aa+xx$ per $2a$;
imperocchè (56)

la divisione serve a trovare il moltiplicando d'un
prodotto del quale se ne fa il moltiplicatore. Io
comincio dunque la divisione di $2ax+xx$ per $2a$,
il quoziente è $+x$, lo pongo alla radice , e dico ,
se x è il secondo termine cercato , il suo pro-
dotto per $2a$, più il suo quadrato dev' essere
uguale al resto $2ax+xx$: pongo dunque $+x$ a
lato di $2a$, e moltiplico $2a+x$ per lo secondo
termine x (imperocchè il prodotto è allora
uguale alla somma del prodotto di x per $2a$,
e del quadrato di x), ho $2ax+xx$, ch' io
tolgo dal resto $2ax+xx$, e perchè non resta
più niente, io dico, che la radice quadrata di
 $aa+2ax+xx$ è $a+x$; perciocchè per mezzo di

Q

que-

questa operazione si è scomposta questa quantità per dedurne le parti, delle quali ella era composta.

178. Ci serviamo precisamente dello stesso metodo per estrarre le radici quadrate da' numeri: E però, poichè, estraendo la radice quadrata da $aa+2ax+xx$, ne abbiamo veduta la ragione di ciascun operazione, noi non faremo, che enunciar il proceduto per mezzo de' numeri.

Bisogna prima saper la radice quadrata de' numeri, che sono al di sotto di 100. Eccole.

Quadrati. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Radici, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

179. Segue indi, che *un numero semplice non può avere più di due cifre nel suo quadrato*, perchè 10, che è il primo numero composto, ha per quadrato 100, che è il primo numero composto di tre cifre. Continuando questo ragionamento, si vedrà, che *un numero composto di due cifre non può averne più di 4 al suo quadrato*; imperocchè 100, che è il primo numero composto di tre cifre ha per quadrato 10000, che è il primo numero composto di 5 cifre. In generale, *un numero qualunque non può avere al suo quadrato più del doppio delle sue cifre*.

Si domanda la radice quadrata di 17,64
1764; io dico, poichè questo numero 16 (42
ha quattro cifre, la sua radice ne deve —
aver due, scompartisico dunque queste 1,64
cifre di due in due per mezzo di virgo- 8,2
le, incominciando da destra a sinistra; —
cerco prima un quadrato nel primo 164
membro a sinistra, dicendo, la ra- 0
dice quadrata di 17 è 4 e un poco

più

più , pongo 4 da parte ; tolgo il quadrato di 4 , cioè 16 da 17 , resta 1 ; abbasso a lato di questo resto l'altro membro 64 ; * Poi dico 4 , che è la prima parte della radice trovata è 40 riguardo alla seconda ; lo raddoppio , ed ho 80 ; divido 164 per 80 , il quoto è 2 , che è l'altra parte della radice trovata ; prendo da parte il quadrato della seconda parte trovata della radice , cioè di 2 , che è 4 ; moltiplico a parte 80 , che è il doppio della seconda parte , per 2 , ed ho 160 ; unisco 4 a 160 , e tolgo la somma 164 dal numero abbassato 164 , e perchè resta 0 , conchiudo , che 42 è la radice cercata . Ovvero per maggior facilità io fo quest'altra operazione , che si riduce alla stessa , cioè * raddoppio 4 radice trovata , ed ho 8 ; lo pongo sotto di 6 ; divido 16 per 8 : il quoto è 2 , che pongo nella radice , e a lato di 8 ; moltiplico 82 per 2 , e tolgo il prodotto 164 dal primo resto 164 , e perchè resta 0 , io dico , che 42 è la radice cercata .

Si domanda la radice 38, 94, 89, (624 quadrata di 389489 : 36

io divido questo numero	————
in membri di due in due,	2, 94
andando da destra a sinistra,	1 2,2
cerco prima la più prossima radice quadrata	2 44
	————
del primo membro 38 ,	5089
ch'è 6 , pongo 6 nella radice , e tolgo il suo quadrato 36 da 38 , resta 2 ;	1244
abbasso a lato di questo	4976
resto il secondo membro	————
	113

G 2

94;

94; raddoppio la radice trovata 6, ed iscrivo 12, ponendo 2 al di sotto di 9 prima cifra del secondo membro; divido 29 per 12, il quoziente è 2, lo pongo nella radice, ed a lato del divisore 12; moltiplico 122 per 2, e tolgo il prodotto 244 da 294, resta 50; abbasso il terzo membro a lato di questo resto, e riguardando 62 come la prima parte d'una radice composta di due termini, lo raddoppio, e scrivo 124, ponendo 4 al di sotto di 8 prima cifra dell'altro membro abbassato; divido 508 per 124, scrivo il quoziente 4 nella radice, ed a lato di 124; moltiplico 1244 per questo quoziente 4, ne sottraggo il prodotto 4976 da 5089 e restano ancora 113, e poichè non vi sono più membri d'abbassare, io dico, che la più prossima radice quadrata di 389489 è 624: e se non vi fossero 113 di più, questo numero sarebbe un quadrato perfetto (a).

180. Quando il calcolo non ricerca troppa esattezza, si può trascurare il resto delle estrazioni di radici; ma quando si vuol tener conto di questi resti, si cercheranno i decimali della radice, aggiungendo a' residui tante volte due zeri, quanti decimali si vorranno avere, e, continuando l'estrazione, i numeri, che

(a) E infatti da 389489 sottraendo 113, rimarrà 389376, il quale (estraendone la radice, secondo le regole or ora esposte) si troverà esser un quadrato perfetto, la cui radice è 624. Dunque per prova di questa operazione si faccia così: *Dal numero dato si sottragga ciò che resta all'ultimo, e la differenza dovrà esser un quadrato perfetto; altrimenti vi sarà errore. Ovvero: S'innalzi a quadrato la radice trovata, e vi s'aggiunga ciò che rimase nel fine dell'operazione; e si dovrà restituire il numero, donde si volle estrarre la radice.*

ne verranno, saranno tanti decimali.

Per esempio, aggiungo due zeri all'avanzo 113, riguardo il numero 624

trovato come la prima parte d'una radice composta di due termini, lo raddoppio, e scrivo 1248,

ponendo 8 al di sotto del primo zero; divido 1130 per 1248, il quoziente

è 0; pongo 0 nella radice, ed a lato di 1248: moltiplico 12480 per 0, e

tolgo il prodotto 0 da 11300, resta 11300; pongo di nuovo due zeri a lato di questo avanzo, raddoppio la radice 6240, ch'io

riguardo come la prima parte d'una radice composta di due termini, e scrivo 12480, ponendo

0 sotto il primo de' due zeri aggiunti; divido 1130000 per 12480,

ne scrivo il quoziente 9 nella radice, ed a la-

38,94,89 (624,0905 cc.
36

294

122

244

5089

1244

4976

11300

12480

0

1130000

124809

1123281

671900

1248180

0

67190000

12481805

62409025

47809075, cc.

to di 12480 ; multiplico 124809 per lo quoziente 9 , e tolgo il prodotto 1123281 da 1130000 , restano ancora 6719 . Posso trascurar questo avanzo , contentandomi della radice 624, 09 ; ma , se voglio approssimar d'avantaggio alla vera radice , aggiungo ancora due zeri a questo resto 6719 , e così di seguito , ricominciando sempre la stessa operazione , troverò quanti decimali vorrò .

181. Oss. Si estraee la radice da una frazione , estraendo quella di ciascuno de' suoi termini . Così $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; poichè $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Similmente $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, ec. (a) .

Delle Principali proprietà delle potenze in numeri .

182. **T**EOREMA I. Il Prodotto d'una potenza perfetta d'un numero qualunque per una potenza imperfetta dello stesso grado , non può essere una potenza perfetta di questo grado .

DIMOSTRAZIONE. Se a^3 è un cubo perfetto , e b un cubo imperfetto , io dico , che $a^3 b$ è un cubo imperfetto : imperocchè , se fosse un cubo perfetto , la sua radice sarebbe esattamente , e senza resto $= ab^{\frac{1}{3}}$; e dividendo $ab^{\frac{1}{3}}$ per a vero valore della radice cubica di a^3 , si avrebbe $b^{\frac{1}{3}}$ vero valore , e senza resto della radice cubica di b , dunque b non sarebbe un cubo imperfetto , ciò che è contro la supposizione .

183.

(a) Ma quando i termini non sono numeri quadrati , basta indicare l'estrazione , mettendo il segno radicale in testa della frazione ; Ovvero si riduce la frazione in decimale , e si fa l'estrazione della radice della stessa maniera , come si pratica per li residui de' quadrati imperfetti .

183. COROLL. Non è possibile, che un numero quadrato sia duplo, triplo, quintuplo ec. d'un'altro numero quadrato, poichè, 2, 3, 5 ec. sono quadrati imperfetti: similmente un numero cubico non può essere duplo, triplo, quadruplo ec. d'un'altro numero cubico, perchè 2, 3, 4 ec. sono cubi imperfetti. In generale le potenze perfette non possono essere multiple di potenze perfette dello stesso grado, se non se quando si tratta di quelle, che sono perfette.

184. TEOREMA II. A qualunque potenza si elevi un numero, che non ha, che certi numeri primi per divisori esatti, non acquista mai altri numeri primi per divisori esatti.

DIM. Egli è chiaro per esempio, che se abc non ha per divisori esatti, che i tre primi numeri a , b , c , egli non ne ha altri quando è elevato al quadrato $aabbcc$, o al cubo $a^3 b^3 c^3$ ec.

185. COROLL. Due numeri, che non hanno divisori comuni, (eccettuandone sempre l'unità, la quale è contenuta in tutti i numeri interi senza essere propriamente lor divisore) non ne possono avere a qualunque stessa potenza si elevino tutti e due.

Imperocchè i divisori esatti non possono essere, che a numeri primi (a), o i multipli de' numeri primi. Or due numeri, che non hanno comuni divisori, non hanno numeri primi per comuni divisori, dunque nemmeno n'acquistano dall'essere alzati ad una stessa potenza (b); dunque per più forte ragione non acqui-

G 4

sta.

(a) Si veggia al §. 65. quali, e cosa sono i numeri primi.

(b) Così 2, e 3, (numeri primi) essendo innalzati ad una stessa potenza, per esempio, al quadrato, saranno 4, e 9; iquali nemmeno avranno divisore commune, come non lo hanno 2, e 3.

stano neppure i multipli de' numeri primi per comuni divisori; dunque non ne hanno nessuno.

186. TEOR. III. Un numero intero congiunto ad una frazione ridotta all'espressione la più semplice, non può divenire numero intero solo dall'esser elevato a potenza.

DIMA. Una frazione ridotta all'espressione la più semplice, è quella, nella quale i due termini non hanno comune divisore (a); or il numero congiunto ad una tale frazione essendo ridotto ad una frazione sola (b), questa nuova frazione non ha nemmeno comune divisore, imperocchè, se ella allora lo avesse, il suo denominatore (che è lo stesso, che prima della riduzione) diverrebbe più piccolo, e per conseguenza la frazione non sarebbe stata realmente ridotta all'espressione la più semplice (c), ciò che è contro l'ipotesi. Dunque i termini d'una frazione, che riunisce un numero intero, ed una frazione ridotta all'espressione la più semplice, non hanno comune divisore; dunque eglino non ne possono acquistare per niuna elevazione ad una stessa potenza. Or una frazione non si riduce ad intero, se non che quando il denominatore è un comune divisore de' due termini; dunque una frazione, che riunisce un numero intero ad una frazione ridotta all'espressione la più semplice, non può giammai ridursi a numero intero, a qualunque stessa potenza si elevino i suoi due termini.

187. COROLL. Non si può assegnare nessun nu-

(a) Così $\frac{2}{4}$ è una frazione in cui i due termini 3, e 4, non hanno divisore comune.

(b) Così se alla frazione $\frac{2}{4}$ s'aggiunga 2, s'avrà $2 + \frac{2}{4} = \frac{10}{4}$.

(c) Così $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{2}$ non può ridursi a più semplice espressione, onde il 4 non può divenire più piccolo.

numero per esprimere esattamente la radice d' un numero, che non sia una potenza perfetta dello stesso grado della radice domandata.

Imperocchè, se questo numero del quale si domanda la radice è un numero intero, supponghiamo, che la sua radice esatta sia un numero intero congiunto ad una frazione, bisognerebbe, che, elevandosi questa radice alla sua potenza, si ritrovasse il numero intero dato, il che si è dimostrato (186) impossibile. Lo stesso accade, se il numero, del quale si domanda la radice è una frazione, o un numero intero congiunto a frazione, di natura tale, che questo numero, e questa frazione essendo ridotti ad una frazione sola, ciascun termine non sia una potenza perfetta dello stesso grado della radice domandata, imperocchè allora si può considerare ciascun termine della frazione, come un numero intero a parte, del quale non si può assegnar la radice.

188. Le espressioni delle radici de' numeri, che sono potenze imperfette si chiamano incommensurabili. Tali sono $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, ec.

Dell' estrazione della radice cubica.

189. **S**I trovano le regole per estrarre la radice cubica, e similmente quelle delle altre potenze, ragionando sulla natura de' polinomj elevati a queste potenze, come abbiain fatto per la radice quadrata (a).

Sia proposto d' estrarre la radice cubica di $a^3 + 6aab + 12abb + 8b^3$. Io dico, la radice di questa quantità è un polinomio. Supponghiamo, che
que-

(a) Queste regole però saranno tanto più complicate, quanto la potenza è d' un grado maggiore.

questo sia un binomio; il suo cubo dev' esser composto (164) del cubo di ciascun termine, e del triplo del prodotto di ciascun termine pel quadrato dell'altro.

Ciò posto, io veggio che il primo termine a^3 è un cubo, ne scrivo la radice a a parte, ne prendo il cubo a^3 , e lo tolgo dalla quantità proposta, e resta $6aab + 12abb + 8b^3$.

Dico dipoi, in questo resto vi è un prodotto del triplo del quadrato del primo termine a trovato, pel secondo termine, che si cerca: elevo dunque a al quadrato, lo triplo, ed ho $3aa$, per lo quale comincio a dividere il resto, dicendo $6aab$

— = $2b$; pongo $+ 2b$ nella radice, e dico, se

$3aa$
 $2b$ è il secondo termine, la somma del suo prodotto per $3aa$, più il prodotto del suo quadrato per $3a$, più il suo cubo devono essere uguali al resto. Or questa somma è $6aab + 12abb + 8b^3$ precisamente uguale al resto: dunque la sua radice cubica è $a + 2b$.

190. Pe' numeri, bisogna prima conoscere i dieci suoi primi cubi perfetti.

Cubi 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

Radici 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Donde si può osservare, che un numero non può avere al suo cubo più che il triplo delle sue cifre; imperocchè 10, primo de' numeri composti di 2 cifre, ha per cubo 1000 primo de' numeri composti di 4 cifre; 100, primo de' numeri composti di 3 cifre ha per cubo 1000000 primo de' numeri composti di 7 cifre ec. Si può similmente per una simile induzione conchiudere in generale,

Che un numero composto di n di cifre, non può avere alla sua potenza p più cifre di quelle, che n esprime pn . Sia

Sia dato il numero 74088, del quale bisogna estrarre la radice cubica. Bisogna dividerlo in membri di 3 in 3, andando da destra a sinistra;

Indi dire, la radice cubica la più prossima del primo membro 74 è 4, scrivo 4 da parte, l'elevo al cubo 64, lo tolgo da 74 resta 10. Abbasso il secondo membro 088 a lato del resto 10. Elevo al quadrato la prima parte trovata 4, la quale deve valer 40 riguardo alla seconda cifra, che cerchiamo, ho 1600, lo triplo, moltiplicandolo a parte per 3, e scrivo il prodotto 4800, al disotto di 10088;

10088

divido l' un per l' altro, dicendo $\frac{10088}{3800} = 2,$

3800

scrivo 2 nella radice, moltiplico il divisore 4800 per la seconda parte trovata 2, il prodotto è 9600, che io scrivo al disotto di 4800; elevo 2 al quadrato 4, lo moltiplico a parte per 40 che è la prima parte della radice, ne moltiplico 74, 088 (42 il prodotto 160 per 3, e scrivo il 64

nuovo prodotto 480 al di sotto di 9600. ———

In fine io cubo 2, ed ho 8, che scri- 10088

vo al di sotto di 480. Aggiungo in- 4800

sieme i due prodotti, e questo cubo, ———

e poichè la loro somma 10088 è 9600

uguale al resto 10088, e che non 480

vi sono più membri da abbassare, io 8

dico, che la radice cubica di 74088 ———

è 42 precisamente (a). 10088

—————

0

Al.

(a) La ragione di questa operazione nasce dalla natura del cubo, nel quale (164) si dovranno trovare 2°. i cubi de' due suoi termini, uno de' quali è il 64 (che

Altro esempio. Sia proposto d'estrarre la radice cubica dal numero 5305472. Lo divido in membri di 3 in 3; poi dico, la radice cubica la più prossima del primo membro 5 è 1: il cubo di 1 è 1, lo tolgo da 5 resta 4. Abbasso il secondo membro, ed ho 4305. E dico 1, essendo la prima parte della radice, val 10 riguardo alla seconda, il quadrato di 10 è 100, il suo triplo è 300, divido 4305 per 300, dicendo in 43 quante volte entra 3? deve entrarvi 14 volte; ma poichè non si pone mai più di 9 nel quoziente, e similmente, che ponendosi 9 nel caso presente, vi si porrebbe troppo, come è facile provarlo, seguendo

5, 305, 472 (174, 41 ec.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 \hline
 4 \ 305 \\
 \quad 300 \\
 \hline
 2100 \\
 1470 \\
 \quad 343 \\
 \hline
 3913 \\
 \hline
 392472 \\
 \quad 86700 \\
 \hline
 346800 \\
 \quad 8160 \\
 \quad \quad 64 \\
 \hline
 355024 \\
 \hline
 37448000 \\
 \quad 9082800 \\
 \hline
 36331200 \\
 \quad 83520 \\
 \quad \quad 64 \\
 \hline
 \end{array}$$

le

(che vale 64000, poichè la sua radice 4 equivale a 40, come s'è detto di sopra), e l'altro è 8 : 2.° i prodotti di 3 volte il quadrato di ciascun termine per l'altro, che in questo caso faranno 9600, e 480. Or facendo una somma de' due cubi 64000, e 8, e de' due prodotti 9600, e 480, s'avrà il numero 74088; che è quello da cui si cercò d'estrarre la radice; e che s'è trovato esser un vero cubo, la cui radice è 42,

le regole precedenti ; io	36414784
trovo, dopo aver prova-	1033216000
to e 9, e 8, che si de-	912460800
ve porre 7 nel quozien-	
te . Pongo 7 nella ra-	912460800
dice . Moltiplico 300 per	52320
7, ed ho il prodotto	1
2100, e dico $7 \times 7 = 49$,	
indi $49 \times 10 = 490$, in fi-	912513121
ne $490 \times 3 = 1470$, scri-	120702879

vo 1470 sotto 2100. Poi dico $7 \times 7 \times 7 = 343$. Lo scrivo al di sotto di 1470, aggiungo insieme 2100, 1470, e 343, e tolgo la somma 3913 dal membro 4305, resta 392. Abbasso a lato il terzo membro 472; riguardo 17, che ho di già trovato, come la prima parte della radice, che vale 170 a riguardo della seconda parte cò'io cerco; ne prendo il quadrato 2890, lo triplo, ed ho 86700 per lo quale divido il terzo membro 392472, ho il quoziente 4, che scrivo nella radice; moltiplico il divisore 86700 per 4, scrivo al disotto il prodotto 346800. Poi fo $4 \times 4 = 16$, $16 \times 170 \times 3 = 8160$. Scrivo 8160 al di sotto di 346800. Scrivo al di sotto il cubo di 4, che è 64. Aggiungo queste tre quantità, e tolgo la loro somma 355024 dal terzo membro 392472 resta 37448. E perchè non vi sono più membri d'abbassare, dico, che la radice cubica domandata è 174, e che il numero dato non è cubico, ma ha 37448 unità di più.

191. Se si vuole aver conto di questo resto, bisogna cercare i decimali per la radice. Perciò, bisogna aggiungere a' residui tante volte 000, quanti decimali si vorranno, e continuar l'estrazione, ri-
guar-

guardando sempre tutt'occhè, che è stato di già trovato nella radice, come una prima parte, della quale si cerca la seconda. Cid meglio s'intende coll' esempio (a).

Metodo generale per estrarre per approssimazione tutte le radici dalle potenze più elevate del quadrato.

192. **N**ella pratica delle matematiche, quando bisogna estrarre la radice da una potenza più elevata del quadrato si fa uso con gran vantaggio de' logaritmi (343); ma accade qualche volta, che si vorrà avere un gran numero di decimali nella radice, cid, che i logaritmi ordinarij non possono dare. Si trovano questi decimali con molta facilità, coll' ajuto delle formole seguenti del Sg. Halley.

$$\sqrt[3]{(a^3 \pm b)} = \frac{1}{3}a + \sqrt{\left(\frac{1}{3}aa \pm \frac{b}{3a}\right)}$$

$$\sqrt[4]{(a^4 \pm b)} = \frac{1}{4}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa \pm \frac{b}{6a^3}\right)}$$

$$\sqrt[5]{(a^5 \pm b)} = \frac{1}{5}a + \sqrt{\left(\frac{1}{5}aa \pm \frac{b}{10a^4}\right)}$$

$$\sqrt[6]{(a^6 \pm b)} = \frac{1}{6}a + \sqrt{\left(\frac{1}{6}aa \pm \frac{b}{15a^5}\right)}$$

$$\sqrt[7]{(a^7 \pm b)} = \frac{1}{7}a + \sqrt{\left(\frac{1}{7}aa \pm \frac{b}{21a^6}\right)}$$

Sia proposto, per esempio, di trovar la radice quinta di 161900 con 12 decimali. Io divido per 5 il logaritmo di 161900, che è 5, 2092468, ho 1, 0418494 logaritmo di 11, 012 radice prossima;
se

(a) Dall' esser siffatte operazioni troppo lunghe, i Matematici per lo più sogliono estrarre le radici cubiche per mezzo de' Logaritmi, o del metodo, che segue.

fo 11, 012 = 2: Elevo 11, 012 alla quinta potenza, ed $bo\ a^5 = 161931, 378732020728832$, che eccede 161900 di 31, 378732020728832. Fo questo eccesso uguale a b, ed $bo\ a^5 - b = 161900$,

dunque per la formola $\sqrt[5]{(a^5 - b) = \frac{4}{5}a + \sqrt[5]{(\frac{1}{5}aa - \frac{b}{10a^3})}$, bo, sostituendone i numeri, $\sqrt[5]{(a^5 - b) = 8$,
 $259 + \sqrt[5]{(7,579009 - \frac{13353,607537280}{1000000})}$

= 8, $259 + \sqrt[5]{(7,579009 - 0,013353607537280)} = 8$, $259 + \sqrt[5]{(7,576659168170684470963886)} = 8, 259 + 2,752571372039 = 11, 011571372039$ radice cercata.

Il calcolo per trovare queste formole è facile, e si può continuarne la tavola per le potenze elevate al di sopra della settima, sia per induzione in osservandone la legge, che queste formole seguitano, sia calcolandole espressamente secondo l' esempio seguente, che ha servito per la radice quinta.

Sia $\sqrt[5]{(a^5 + b) = a + d$, dove d esprime una frazione, si ha dunque $a^5 + b = a^5 + 5a^4d + 10a^3dd + 10aad^3 + 5ad^4 + d^5$. E perchè i valori delle frazioni (159) diminuiscono a proporzione, che si elevano a più alte potenze, si possono riguardare come picciolissimi (e per conseguenza trascurarsi) i termini, che son moltiplicati per le potenze di d che passano il quadrato. Si può dunque supporre $a^5 + b = a^5 + 5a^4d + 10a^3dd$, o sia $b = 5a^4d + 10a^3dd$.

Dividendo tutto per $10a^3$ si ha $\frac{b}{10a^3} = \frac{5}{2}ad + dd$, dunque (225) si ha $\sqrt[5]{(\frac{1}{5}aa + \frac{b}{10a^3})} = \frac{1}{5}a + d$:
 ag-

aggiungendo da una parte, e dall'altra $\frac{3}{4}a$ si ha

$$\frac{3}{4}a + \sqrt{\left(\frac{1}{16}aa + \frac{b}{10a^2}\right)} = a + d = \sqrt[5]{(a^5 + b)(a)}.$$

Calcolo degli incommensurabili.

VI sono poche equazioni, dove non s' incontrino incommensurabili, cioè a dire, radici di potenze imperfette sulle quali non pertanto bisogna fare tutte le operazioni, che esigono le differenti regole della soluzione delle equazioni. Questo calcolo si può fare in due maniere, l'una, che si chiama il calcolo de' radicali, lasciando i segni radicali a' termini de' quali si esprimon le radici: e l'altra, che si chiama il calcolo delle potenze pe' loro esponenti, sostituendo gli esponenti negativi, e frazionarj in luogo de' segni radicali.

Calcolo delle potenze pe' loro esponenti.

193. **Q**Uando si conosce la natura degli esponenti delle potenze non s' incontra alcuna difficoltà nel loro calcolo.

Così per aggiungerle bisogna unirle co' loro segni. Per sottrarle, bisogna scambiare i segni de' coefficienti (non già quelli degli esponenti) di quella, che se vuol sottrarre. Per moltiplicarle, bisogna unire i loro esponenti, se il moltiplicatore, e' l' moltiplicando sono termini simili, se no' bisogna scriverle uno accanto all' altro senza frapporvi segni. Per dividerle, quando sono termini simili, bisogna sottrarre l' esponente del divisore da quello del dividendo; se no' bisogna metterle in frazione. Infine per elevarle

a po-

(a) Si troverà alla fine di questa 1.^a parte la Formola generale per innalzar un binomio $a \pm b$ ad una potenza qualunque, e per estrarne una qualunque radice.

Le potenze qualunque, o per estrarne una radice qualunque, bisogna moltiplicare i loro esponenti per l'esponente intero, o frazionario, che risponde alla potenza, o alla radice, che si cerca. Per esempio,

La somma di a^n , e di $a^{\frac{1}{m}}$ è $a^n + a^{\frac{1}{m}}$: la differenza è

$a^{\frac{n}{m}} - a^{\frac{1}{m}}$: il prodotto è $a^{n+\frac{1}{m}}$: il quoto è $a^{n-\frac{1}{m}}$: la loro

potenza p è a^{pn} , $a^{\frac{p}{m}}$: la loro radice q , cioè

a dire, la loro potenza $\frac{1}{q}$ è $a^{\frac{n}{q}}$, $a^{\frac{1}{qm}}$.

La somma di a^n , e di b^{-m} è $a^n + b^{-m}$, la differenza è $a^n - b^{-m}$, il prodotto è $a^n b^{-m}$,

ovvero $\frac{a^n}{b^m}$, perchè (168) $b^{-m} = \frac{1}{b^m}$.

* Ed $a^n \times \frac{1}{b^m} = \frac{a^n}{b^m}$. * Il quoto è $\frac{a^n}{b^{-m}}$, ovvero

$a^n b^m$ per la stessa ragione, * cioè

perchè $b^{-m} = \frac{1}{b^m}$. Imperocchè allora $\frac{a^n}{b^{-m}} =$

$\frac{a^n}{\frac{1}{b^m}} = a^n \times \frac{b^m}{1} = a^n b^m$. * (Notate bene queste due

ultime espressioni). La loro potenza m è a^{mn} , b^{-mm} :

la loro radice p è $a^{\frac{n}{p}}$, $b^{-\frac{m}{p}}$, o pure $b^{\frac{m}{p}}$, o sia

$\frac{1}{\sqrt[p]{b^m}}$.

F

Cal.

194. **P**ER abbreviare metteremo quì le formole solamente, in luogo delle regole espresse in lunghi discorsi, elleno saranno più chiare. Rendendosi queste formole familiari, si riterrà più facilmente la pratica del calcolo, e allora o le dimostrazioni, delle quali ne abbiamo indicate qualcheduna solamente, si presenteranno da per se stesse all' animo, per poco, che vi si faccia riflessione, o pure sostituendo gl' esponenti a' radicali, si troverà facilmente, che le operazioni sopra i radicali, si riducono a quelle, che si fanno nel calcolo delle potenze pe' loro esponenti.

* Non sarà pertanto fuor di proposito di osservare antecedentemente quì...

Oss. I. Che siccome $aa^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ dinota il prodotto di $aa^{\frac{1}{2}}$ per $b^{\frac{1}{2}}$, così essendo $aa^{\frac{1}{2}} = \sqrt{aa}$, $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$, $\sqrt{aab}$ dinoterà anche il loro prodotto; e perchè $\sqrt{aa} = a$, sarà $\sqrt{aab} = a\sqrt{b}$.

II. Che le quantità fuori del segno radicale fanno l'istesso uffizio, che i coefficienti avanti le lettere, onde anche si chiamano i coefficienti de' radicali; e quantità radicali, o sotto il segno sono quelle, che stanno dopo il segno radicale.

III. Che siccome per sommare, e sottrarre le quantità simili basta sommare, o sottrarre i coefficienti, e porre i termini simili una sola volta, così ne' radicali. I radicali poi simili son quelli, che hanno l'istesso segno, e le istesse quantità sotto il segno.

IV. E così nel moltiplicare, o dividere i radicali, moltiplicheremo, o divideremo prima i coeffi-

cien-

cienti, e poi i radicali fra loro*.

Bisogna osservare inoltre, che quando l'espressione d'un' incommensurabile è tale, che possa esser divisa senza resto per qualche quantità, elevata ad una potenza indicata per l'esponente della radice, allora si può ridurre quest'espressione ad una più semplice, scrivendo questa quantità come un coefficiente della radice, e mettendo solamente il quoziente sotto il segno radicale.

Per esempio, l'espressione $\sqrt{aab}$ è tale, che il quadrato di a può dividere aab : pongo dunque $a\sqrt{b}$:

L'espressione $\sqrt[3]{432}$ è tale, che 432 può esser divisa senza resto per lo cubo di 3 che è 27 , per lo cubo di 6 che è 216 , e per lo cubo di 2 che è 8 ; imperocchè

$$\frac{432}{27} = 16, \quad \frac{432}{8} = 54, \quad \frac{432}{216} = 2: \text{ si può dunque}$$

ridurre $\sqrt[3]{432}$ ad una di queste tre espressioni equi-

valenti $\sqrt[3]{16}$, $2\sqrt[3]{54}$, $6\sqrt[3]{2}$. Similmente nella

espressione $\sqrt[4]{a^5 b^4}$, la quantità $a^5 b^4$ può esser divisa per la quarta potenza di ab , io posso dunque porre $ab\sqrt[4]{a}$ in luogo di $\sqrt[4]{a^5 b^4}$.

Si troverà similmente, che...

$$\sqrt[4]{b^3 d} = \frac{b\sqrt[4]{bd}}{aag} = \frac{b\sqrt[4]{bd}}{a\sqrt[4]{g}}: \text{ che } \frac{a\sqrt[4]{48bcc}}{2\sqrt[4]{16dg^4}} = \frac{4ac\sqrt[4]{3b}}{4g\sqrt[4]{2dg}}$$

$$\frac{ac\sqrt[4]{3b}}{g\sqrt[4]{2dg}} \text{ ec.}$$

$$\sqrt[4]{8\sqrt[4]{2dg}}$$

195. Per far entrare una espressione qualunque $\sqrt[n]{\frac{a^n c}{b d}}$ in un radicale qualunque $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ senza mutare il valore.

$$\text{Formola} \dots \sqrt[n]{\frac{a p^n c q^n}{b q d q^n}}. \text{ Imperocchè } \sqrt[n]{\frac{p^n q^n}{q p^n}} =$$

$$\sqrt[n]{\frac{p q^n}{q p}} = 1. \quad * \text{ Ovvero, perchè, moltiplicando}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a^n c}{b d}} \text{ per } \sqrt[n]{\frac{p q}{q p}} = 1, \text{ non si cangia il valore; si moltiplica, e si ha}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a p q^n c q^n}{b p q d q^n}}, \text{ si ponga } \frac{q}{p} \text{ sotto il se-$$

$$\text{gno, e si ha } \sqrt[n]{\frac{a p^n c q^n}{b q d p^n}}.*$$

196. Per togliere il coefficiente $\frac{a}{b}$ dal radicale $\sqrt[n]{\frac{a^n c}{b d}}$.

$$\text{le } \sqrt[n]{\frac{a^n c}{b d}}. \text{ Formola} \dots \sqrt[n]{\frac{a^n c}{b^n d}} (a).$$

197. (a) Per levar il coefficiente dato, bisogna passarlo sotto il segno: per passarlo sotto il segno, bisogna innalzarlo alla potenza espressa dal radicale: bisogna dunque innalzare $\frac{a}{b}$ alla potenza n , e s'avrà $\frac{a^n}{b^n}$, e così metterla sotto il segno, onde ne nascerà la divisata *formola* $\sqrt[n]{\frac{a^n c}{b^n d}}.$

197. Per ridurre in intero la frazione $\frac{c}{d}$,

che è sotto il segno radicale $\sqrt[n]{\frac{a}{b} \frac{c}{d}}$.

Formola .. $\sqrt[n]{\frac{a}{bd} cd^{n-1}}$. Imperocchè $\sqrt[n]{\frac{a}{bd} \frac{cd^n}{d}} =$

$\sqrt[n]{\frac{a}{bd} cd^{n-1}}$. * Cioè, perchè è l'istessa cosa, che

far entrare l'espressione $\frac{c}{d}$ nel radicale proposto :

Imperocchè (195) si ha $\sqrt[n]{\frac{a}{bd} \frac{cd^n}{d^{1^n}}} = \sqrt[n]{\frac{a}{bd} \frac{cd^n}{d}}$ *.

198. Per ridurre ad uno stesso esponente i

due radicali $\sqrt[p]{\frac{a}{b}} \sqrt[q]{\frac{c}{d}}$.

Formola .. $\sqrt[p]{\frac{a^u}{b^u}}$, ed $\sqrt[q]{\frac{c^n}{d^n}}$.

Quando sono più, riduconsi successivamente due a due.

199. Per aggiunger insieme due radicali ; si scrivono di seguito l'un dopo l'altro co' loro segni. Ma, se fossero tali, che avendo uno stesso espo-

uente, la quantità sotto il segno fusse ancora la

stessa, per esempio, se si dovessero aggiungere $\sqrt[p]{a}$ $\sqrt[q]{a}$

$\sqrt[p]{a}$ $\sqrt[q]{a}$ la somma sarebbe $\sqrt[p]{a} + \sqrt[q]{a}$

200. Per sottrarre due radicali, bisogna scambiare il segno del coefficiente di quello, che si vuol sottrarre; e, se hanno lo stesso esponente, e la stessa quantità sotto il segno, allora si deve prendere la

differenza de' coefficienti. Così $\sqrt[p]{a} - \sqrt[q]{a} =$

$\sqrt[p]{a} - \sqrt[q]{a}$

201. Per moltiplicare due radicali, per

esempio $\sqrt[p]{a}$ per $\sqrt[q]{a}$

Formola .. $\sqrt[p]{a} \sqrt[q]{a} = \sqrt[pq]{a^p a^q}$ * Imperocchè toglien-

do il segno radicale, questa formola diviene

$\sqrt[p]{a} \sqrt[q]{a} = \sqrt[pq]{a^p a^q} = \sqrt[p]{a^p} \sqrt[q]{a^q}$

L'istesso è per la divisione, invertendo i termini del divisore *.

202. Per dividere i radicali . Per esempio

$$\sqrt[n]{a^p y^u c^q} \div \sqrt[pz]{a^u d^n} = \sqrt[nu]{\frac{a^p y^u c^q}{b^u d^n}}$$

203. Per elevare un radicale , per esempio

$$\sqrt[n]{a^p c^q}$$

ad una potenza qualunque , come alla potenza $\frac{u}{s}$.

$$\sqrt[nu]{a^p c^q}$$

Formola . . $\sqrt[nu]{b^u d^n}$. Imperocchè togliendo il se-

gue radicale questa formola diviene $\frac{\sqrt[nu]{a^p c^q}}{\sqrt[nu]{b^u d^n}}$, e il ra-

dicale proposto $\sqrt[n]{a^p c^q} \div \sqrt[p]{b^u d^n}$ diviene $\frac{\sqrt[n]{a^p c^q}}{\sqrt[p]{b^u d^n}}$, la cui potenza $\frac{u}{s}$

$$\frac{\sqrt[nu]{a^p c^q}}{\sqrt[nu]{b^u d^n}}$$

$$\sqrt[nu]{a^p c^q} \div \sqrt[nu]{b^u d^n}$$

(a): H 4 204.

(a) E rimettendo finalmente quest' ultima frazio-

ne sotto il segno radicale, s' avrà (167) $\sqrt[n]{\frac{a^p c^q}{b^u d^n}}$, ch'è

la formola assegnata.

204. Per estrarre una radice qualunque da un radicale, per esempio, la radice $\frac{u}{s}$ dal radicale $\sqrt[n]{a^n c}$

$$\sqrt[n]{\frac{a^n c}{b^u d}}$$

Formola .. $\sqrt[n]{\frac{a^n c}{b^u d}}$ Che si dimostra come la precedente.

Quando si sarà fatta qualche operazione seguendo una di queste formole, bisognerà, se è possibile ridurre il risultato a termini i più semplici, secondo ciò, che è stato detto di sopra.

205. Non sarà difficile d'applicar queste formole alle quantità espresse per numeri, come a quelle espresse per lettere. Imperocchè 1°. queste formole essendo state costruite per quantità frazionarie, non lasciano alcuna difficoltà per le frazioni. 2°. E servono ugualmente agl' interi, perchè ogn' intero può esser (80) supposta una frazione, il cui denominatore sia 1; 3°. se i radicali non hanno coefficienti si può supporre, che abbiano per coefficiente $\frac{1}{s}$; 4°. se le quantità sono complesse si possono supporre uguali a quantità incomplete prese a piacere, e per mezzo delle sostituzioni applicarle le formole precedenti. - Alcuni esempj schiariranno quanto s'è detto.

Sia proposto di moltiplicare $4 \sqrt[3]{2-b}$ per $\frac{1}{3ad}$

$\sqrt{aa+bb}$, io riduco questi due radicali sotto questa

forma $\frac{4}{1} \sqrt[2]{\frac{2-b}{3ad}}$, $\frac{1}{3} \sqrt[4]{\frac{aa+bb}{1}}$, e prendendo i due

radicali proposti al n. 201, fo $4=p$, $1=q$, $2=n$, $2-b=a$, $3ad=b$, indi $1=y$, $3=z$, $4=u$, $aa+bb=c$, ed $1=d$. Di maniera, che per la sostitu-

zione, la formola di quest' articolo, che è $\frac{py}{qz} \sqrt[nu]{\frac{a^u c^n}{b^u d^n}}$

diverrà $\frac{4 \times 1}{1 \times 3} \sqrt[2 \times 4]{\frac{2-b}{3ad} \times \frac{aa+bb}{1}}$, e riducendo $\frac{4}{3}$

$\sqrt[8]{\frac{2-b}{81a^4 d^4} \times \frac{aa+bb}{1}}$

Si vuol dividere $4\sqrt{5}$ per $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Io pongo questi due radicali sotto questa forma

$\frac{4}{2} \sqrt[2]{\frac{5}{1}}$, $\frac{1}{2} \sqrt[2]{\frac{3}{7}}$. Prendo i due radicali proposti nel numero 202, e fo $4=p$, $1=q$, $2=n$, $5=a$, $1=b$, ed $1=y$, $1=z$, $2=u$, $3=c$, $7=d$: allora per la

sostituzione la formola $\frac{pz}{qy} \sqrt[nu]{\frac{a^u d^n}{b^u c^n}}$ diviene $\frac{4 \times 1}{1 \times 1}$

$\sqrt[2 \times 2]{\frac{5^2 \times 7^2}{1^2 \times 3^2}}$ che si riduce a $4 \sqrt[4]{\frac{1225}{9}}$ indi a $4 \sqrt{\frac{35}{3}}$
fa.

facendo l'estrazione della radice quadrata di ciascuno termine sotto il segno.

Delle Equazioni, o dell' Analisi.

206. **L'**Analisi è l'arte di sciogliere per mezzo del calcolo algebrico tutt'i problemi, che si possono proporre sulle grandezze.

207. *Proporre un problema*, è domandare, che si trovi il valore d'una, o di più quantità incognite: or si conosce, che ciò non è possibile, se almeno non si proponga il problema, e non si assegni il rapporto, che hanno queste quantità incognite alle quantità cognite, le quali si chiamano *i dati del problema*.

208. Ciascuno de' rapporti, che si assegnano fra le date, e le incognite si chiama *una condizione del problema*, perchè questi rapporti esprimono la condizione, per cui si ha uguaglianza fra le incognite, e le date.

209. L'espressione algebrica d'una condizione d'un Problema, si chiama un'*Equazione*.

210. Un'equazione dunque è l'unione de' termini Algebratici per lo segno $=$, e composti di quantità cognite, ed incognite.

211. Si usa esprimere le date per le prime lettere dell'Alfabeto, e le incognite per le ultime, come x, y, z . Ciò, che serve, perchè si distinguano a vista.

212. Tutti i termini, che sono a sinistra del segno $=$ formano ciò, che si chiama *il pri-*

no membro dell'equazione; tutti quelli, che sono a destra ne formano il secondo membro.

213. Si chiama in generale *Equazione del primo grado* quella, nella quale l'incognita è alla sua prima potenza. Si chiama *Equazione del secondo grado* quella, dove l'incognita è elevata al quadrato, per esempio, $xx - ax = b$, $aayy + bz = c$ ec. Si chiama *Equazione del terzo grado* quella, nella quale la più alta potenza dell'incognita è il cubo, come $ax^3 - bx = c$. E così delle altre potenze.

214. *Sciogliere un problema* è trovare il valore di ciascuna delle quantità incognite, che si danno: o pure è far vedere, che è impossibile di trovarlo, il che accade quando i rapporti dati implicano qualche contraddizione. Se ne vedranno gli esempj in appresso.

215. *Trovar il valore d' un incognita* è ridurre ad essere sola in un membro d'un'equazione, della quale l'altro membro sia composto di quantità tutte cognite.

226. Per trovare il valore delle incognite d'un problema, bisogna fare su di ciascuna equazione diverse operazioni, secondo lo stato nel quale le incognite si trovano. Queste operazioni sono la Trasposizione, la Divisione, la Moltiplicazione, l' Estrazione delle Radici, e la Sostituzione.

Ecco i casi, ne quali bisogna servirsi di ciascuna.

In una equazione, o vi è una sola lettera incognita, o ve ne sono più d'una.

1°. Se vi è una sola incognita, o ella fa una somma, o una differenza colle altre date, come, se si avesse $a + x - b = c$, allora ci serviamo della tra-

trasposizione. O pure questa incognita fa un prodotto con una, o più date, come $ax+bcx=cd$, ed allora ci serviamo della divisione. O pure l'incognita fa una frazione con una, o più date come

$$\frac{ax}{a+b}=cd, \text{ o pure } \frac{a}{x}=c, \text{ ed allora ci serviamo}$$

mo della moltiplicazione. O in fine questa incognita è elevata ad una qualche potenza, come $ax-xx=c$, ed allora ci serviamo della estrazione delle radici.

II°. Se vi sono più incognite, bisogna, che vi siano nell'espressioni dello stesso problema altre equazioni, che contengano le stesse incognite; come, se vi fossero due equazioni dello stesso problema $x-ay=b$, e $bx+cy=d$. In questo caso ci serviamo della sostituzione.

Di maniera, che avendo apprese le cinque operazioni seguenti, si deve vedere in tutti i casi, qual'è quella, che bisogna attualmente applicare all'equazione, che si vuol sciogliere, per trovar il valore dell'incognita, che vi si contiene.

Della Trasposizione.

217. **L**A trasposizione serve a far passare un termine da un membro dell'equazione nell'altro membro, senza cangiar l'uguaglianza fra questi membri. Perciò bisogna togliere questo termine nel membro dov'egli è, e scriverlo nell'altro membro col segno contrario.

Per esempio, per trasporre ac nell'equazione, $ac+x=b$, io tolgo ac dal primo membro, e metto $-ac$ nel secondo membro, ed ho $x=b-ac$; imperocchè il membro $ac+x$ essendo
 ugua-

uguale al membro b , se tolgo ac da ciascuno, i resti saranno uguali (17). Io avrò dunque $ac + x - ac = b - ac$, e facendo la riduzione $x = b - ac$.

218. COROLL. I^o. Si può dunque per mezzo della trasposizione rendere positivo un termine negativo, e reciprocamente.

219. II^o. Per la trasposizione si può prendere il valore d'un termine qualunque, lasciandolo solo in un membro.

220. Notate, che noi distinguiamo qui tra prendere il valore d'un termine, e trovare il suo valore. Prendere il valore d'un termine, o d'una lettera è fare in maniera, che questo termine, o questa lettera faccia sola un membro d'una equazione, di qualunque quantità cognite, o incognite sia composto l'altro membro. Trovar il valore d'un termine, o d'una lettera è farne un membro d'un'equazione, di cui l'altro sia composto di quantità tutte cognite

Della Divisione.

221. **L**A divisione serve a sciogliere una, o più quantità cognite, che si trovano moltiplicate per l'incognita, o in generale a separare le due radici d'un prodotto. Per ciò fare bisogna dividere tutti i termini dell'equazione per la quantità cognita, che moltiplica l'incognita, o in generale per la radice, che si vuol sciogliere. Il che non deve cangiare l'uguaglianza tra i membri dell'equazione (217).

Così per sciogliere b nell'equazione $bx - ac = bd - cd$, bisogna tutto dividere per b , e porre $\frac{bx}{b} - \frac{ac}{b} = \frac{bd}{b} - \frac{cd}{b}$, che si riduce ad

$$a \frac{ac}{b} = d - \frac{cd}{b}.$$

222. OSSERVAZIONI. I^o. Una stessa lettera, che si trova in più termini consecutivi, fa un prodotto colla somma di tutte le altre lettere, o coefficienti, che sono in questi termini. Così $ax - bx + 3x$ è il prodotto di $a - b + 3$ per x , di maniera che, se si dovesse separare x nell'equazione $ax - bx + 3x = d$, bisognerebbe mettere $x = \frac{d}{a - b + 3}$. Similmente per separare x nell'equazione $ax - x = b$, bisogna mettere $x = \frac{b}{a - 1}$; perchè $ax - x$ è il prodotto di $a - 1$ per x .

223. II^o. Quando una stessa lettera si trova in tutti i termini d'un'equazione, si dovranno dividere tutti per questa lettera, affin di rendere l'equazione più semplice. Così $abb - bxx = bd$ diviene $ab - xx = d$. Similmente $aac - aa = cabd$, diviene $c - 1 = bd$ dividendo tutto per aa .

Della Moltiplicazione.

224. **L**A Moltiplicazione serve a liberar l'equazioni dalle frazioni, che vi s'incontrano: per ciò fare bisogna moltiplicare tutti i termini dell'equazione pel prodotto de' denominatori di ciascuna frazione, che si vuol togliere. Il che non deve cangiar l'uguaglianza [217].

Così l'equazione $a + \frac{d}{x} = dx$ diviene $ax + d = dxx$, moltiplicando tutto per x ; imperocchè
 si

si ha $ax + \frac{bx}{x} = dxx$, che si riduce ad $ax + b = dxx$.

Similmente l'equazione $\frac{a}{x} + \frac{x}{b} = abc - bcd$ sarà libera di frazione moltiplicando tutto per bx ; imperocchè si avrà $\frac{abx}{x} + \frac{bxx}{b} = abbcx - bbcdx$, che si riduce ad $ab + xx = abbcx - bbcdx$.

Dell'estrazione delle radici per l'equazioni del secondo grado.

225. **Q**uando in una equazione l'incognita è elevata al quadrato.

I°. Bisogna vedere, se questo quadrato è moltiplicato, o è in frazione con un'altra quantità; imperocchè nel primo caso bisogna sciorlo per mezzo della divisione; e nel secondo caso per mezzo della moltiplicazione.

II°. Bisogna vedere, se questo quadrato è positivo, imperocchè, se fosse negativo bisognerebbe renderlo positivo per la trasposizione, perchè un quadrato non può essere negativo: $-xx$ non è altro, che il prodotto di x per $-x$: onde non se ne può estrarre la radice quadrata, perchè ella non può essere nè $-x$, nè $+x$.

III°. Bisogna mettere in un membro solo tutti i termini, dove questa incognita si trova.

IV°. Bisogna vedere indi, se questo membro è un quadrato compito, il che accade quando l'incognita si trova in un solo termine (come $xx = a - b$). E quando, oltre il quadrato dell'incognita, questo membro contiene uno, o più prodotti dell'incognita per alcune altre quantità cognite (come $xx - 2ax = b$), questo membro è un quadra-

to

to incompleto, e bisogna compirlo, aggiungendo a ciascun membro dell'equazione il quadrato della metà della quantità cognita, che moltiplica l'incognita.

V^o. Bisogna estrarre la radice quadrata da ciascun membro dell'equazione, e si troverà facilmente il valore dell'incognita.

Sia proposta quest'equazione $\frac{aa-xx}{b} = 2a-b$,

1^o. tolgo la frazione, ed ho $aa-xx=2ab-bb$; 2^o. rendo questo $-xx$ positivo, mettendo $aa=xx+2ab-bb$; 3^o. pongo xx in un membro solo, ed ho $aa-2ab=+bbxx$; 4^o. a causa di xx solo, il quadrato è compito; 5^o. Estraggo la radice quadrata da ciascun membro, ed ho $a-b=x$.

Sia proposto $a+2xx=b$. Levo 2 dal quadrato dell'incognita, ed ho $\frac{a}{2}+\frac{xx}{2}=\frac{b}{2}$. Traspongo

ed ho $xx=\frac{b-a}{2}$, estraggo la radice, ed ho

$$x=\sqrt{\frac{b-a}{2}}$$

Sia proposta $ax-\frac{xx}{2}+dd=c$, ho, togliendo la frazione, $2ax-xx+2dd=2c$, poi trasponendo, per rendere xx positivo, e metter in un solo membro tutti i termini dove l'incognita si trova, $2dd-2c=-2ax+xx$.

Or è facile il vedere, che questo secondo membro non è il quadrato compito d'un binomio, imperocchè egli non contiene, che il quadrato xx del secondo termine di questo binomio,

mio, e'l prodotto $2ax$ del secondo termine x per $2a$, che è visibilmente il doppio del primo termine, il quale per conseguenza è a , e'l cui quadrato aa manca in questo secondo membro.

Dunque per farne un quadrato compiuto, bisogna aggiungere aa a questo membro, (cioè a dire il quadrato della metà di $2a$ quantità cognita, che moltiplica l'incognita nel termine $-2ax$): e per conservar l'uguaglianza, bisogna aggiungere questo stesso quadrato all'altro membro.

Così l'equazione diverrà $aa+2dd-2c=aa-2ax+xx$; ed estraendo le radici, $\sqrt{aa+2dd-2c}=a-x$.

Sia proposta $gabxx-3bbx=ad$, e sciogliendo per mezzo della divisione il quadrato

dell' incognita, ho $xx-\frac{bx}{3a}=\frac{d}{9b}$, poi ag-

giungendo dall' una parte, e dall' altra $\frac{bb}{36aa}$

(quadrato di $\frac{b}{6a}$ metà di $\frac{b}{3a}$, che moltiplica x

nel secondo termine)s'avrà $\frac{bb}{36aa}+xx-\frac{bx}{3a}=\frac{bb}{36aa}$

$+\frac{d}{9b}$, ed estraendo le radici, farà $\frac{d}{6a}-x=$

$$\sqrt{\frac{bb}{36aa}+\frac{d}{9b}}$$

Similmente l' equazione $x-xx=a$ diviene $-\frac{a}{4}=xx-x$, poi $\frac{a}{4}=-xx-x+\frac{1}{4}$: (perchè $-x$ è stimato il prodotto di x per -1); in

fine $\sqrt{\frac{1}{4}aa - a} = x + \frac{1}{2}$.

L'espressione $xx + ax - x = aa$ diverrà $xx + ax - x + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4} = aa + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}$, e per conseguenza $x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} = \sqrt{aa + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}} = \sqrt{5aa - 2a + 1}$.

2

226. OSSER. Quando una incognita è in una equazione sotto il segno $\sqrt{}$, come, se si avesse $a - \sqrt{x} = b$ si scioglie con porla prima in un membro solo, poi con togliere il suo segno radicale, ed elevare l'altro membro al quadrato. Così bisogna scrivere $a - b = \sqrt{x}$; indi $aa - 2ab + bb = x$. Similmente, se fosse $ax - \sqrt{x} = b$, si ridurrebbe a questa $aaax - 2abx + bb = x$. Ma, se fosse $xx + \sqrt{x} = b$, allora questo Problema diverrebbe del quarto grado, perchè s'avrebbe $x^4 + 2bx + bb = x$.

Della Sostituzione.

227. **L**A Sostituzione è una operazione, per la quale si fanno *svanire* successivamente una, o più quantità incognite, che si trovano in un Problema espresso per più equazioni.

Per esempio, se si hanno queste due equazioni $ax + y = b$, ed $x + by = a$, in ciascuna delle quali vi sono due incognite x , ed y , si potrà farne *svanire* una delle due, per esempio y , prendendo per mezzo della trasposizione il valore di y (219) nella prima equazione, e sostituendo questo valore di y nella seconda equazione. Traspongo dunque ax , ed ho $y = b - ax$, e nella seconda equazione pongo $b - ax$ in luogo di y ; e comechè egli è moltiplicano per b ,
mol-

moltiplico $b - ax$ per b , ed ho $bb - abx = by$. Dunque questa seconda equazione diverrà $x + bb - abx = a$, nella quale non ho più y .

Se avessi voluto far isvanir x , dalla seconda equazione, avrei preso il suo valore nella prima trasponendo prima $+y$, e ponendo $ax = b - y$, indi dividendo tutto per a (221), per avere il

valore dell' incognita x , che diviene $x = \frac{b-y}{a}$.

Avrei posto nella seconda equazione $\frac{b-y}{a}$

in luogo di x , ed avrei avuto $\frac{b-y}{a} + by = a$

nella quale x non si trova più.

Siano date tre equazioni $x + y + z = a$, $x + y - z = b$, $x - y + z = c$; potranno far isvanire due incognite in ciascuna per mezzo della sostituzione in questa maniera. Prendete nella prima il valore di x , ed avrete (217) $x = a - y - z$; ponete $a - y - z$ in luogo di x nell'altre due equazioni, ed avrete $a - y - z + y - z = b$, ed $a - y - z - y + z = c$, che si riducono ad $a - 2z = b$, ed $a - 2y = c$, nelle quali non vi è altro, che una sola incognita. Se voi volete indi ridurre la prima equazione a non aver altro, che l'incognita x , prendete il valore di y , e di z nelle due equazioni $a - 2z = b$, ed $a - 2y = c$, avrete prima, trasponendo, $a - b = 2z$, ed $a - c = 2y$, indi dividendo per 2 (221), avrete $\frac{a-b}{2} = z$; ed $\frac{a-c}{2} = y$: in fine sostituendo que-

sti valori in luogo di y , e di z nella prima equa-

equazione, voi avrete $x + \frac{a-c}{2} + \frac{a-b}{2} = a$.

* OSS. Quando vi sono più equazioni, e più incognite per uno stesso Problema possono tenersi altri metodi in certi casi più facili per la pratica, che la sostituzione non fa. Il metodo esposto intanto, chiameremo I^o. METODO.

II^o. METODO. Sia $x-1=y+1$, ed $x+1=2y-2$. Nella prima $x=y+2$, e nella seconda $x=2y-3$. Dunque $y+2=2y-3$. Nella quale (a) $y=5$. Onde $x=7$. (Che è la soluzione della questione IV. del n. 237) *.

III^o. METODO. Sia $x+y=a$, $x+z=b$, $y+z=c$. Togliendo la seconda equazione dalla prima si avrà $x-z=a-b$, dove x non si trova più. Sommando questa colla terza si avrà $2y=a-b+c$, ed $y=\frac{a-b+c}{2}$. (Che è la so-

luzione della questione III. del n. 237).

IV^o. METODO: Che è una conseguenza del terzo. Sia $3x+5y=a$, $5x+7y=b$. Per poter togliere una dall'altra bisogna, che i coefficienti siano uguali; e perciò, moltiplicate la prima equazione per 5, e si avrà $15x+25y=5a$; moltiplicate la seconda equazione per 3, e si avrà $15x+21y=3b$. Togliete ora questa dall'equazione $15x+25y=5a$, e si avrà $4y=5a-3b$, dove $y=\frac{5a-3b}{4}$. (Che è la solu-

zione della questione II. del n. 237) *.

Def. (a) Poichè trasponendo, sarà $2+3=2y-y$: e finalmente riducendo sarà $y=5$.

Dello scioglimento de' Problemi per mezzo dell' Analisi.

228. **P**ER isciogliere un Problema, bisogna prima considerare attentamente lo stato della questione: distinguerne le condizioni, e le date dalle incognite: esprimere il problema d'una maniera astratta e generale per mezzo delle lettere, facendo in modo, che ve ne siano il meno, che sia possibile; e perciò non bisogna notare con differenti lettere quantità uguali, o parti di quantità uguali, ma solamente per una stessa lettera co' denominatori, o coefficienti, se ve n'è bisogno; bisogna indi esprimere ciascuna condizione per una equazione.

E per avere un equazione compita, bisogna, che vi siano tante equazioni, quante incognite vi sono. Bisogna in fine trovare per le regole precedenti il valore di ciascuna delle incognite. Noi spiegheremo ciò cogli esempj,

229. **ESEMPIO I.** Sia proposta questa questione: *Un padre, ed un figlio hanno 100. anni tutti due, il figlio ha 30. anni meno, che il padre; qual'è l'età di ciascuno?*

Avendo considerata attentamente questa questione, vi si notano due quantità date 100, e 30: e due incognite; cioè l'età del padre, e l'età del figlio. Le due condizioni sono, l'una, che la somma di queste due età incognite è 100, l'altra, che la loro differenza è 30. Bisogna esprimerle per mezzo di due equazioni, ed avendo supposto $100 = a$, $30 = b$, l'età del padre $= x$, l'età del figlio $= y$, riduco il problema a questa questione generale: *Essendo date la somma,*

1 3

e la differenza di due quantità, trovar ciascuna quantità, e l'esprimo così:

Problema espresso in parole	Problema espresso algebricamente.
Si domandano due età . .	$x ; y ?$
la cui somma è $100 = a$. .	$x + y = a$
e la differenza è $30 = b$. .	$x - y = b$

Ho dunque due equazioni $x + y = a$, ed $x - y = b$, in ciascuna delle quali vi sonò due incognite: e perciò si deve impiegare la sostituzione, per avere il valore d'una delle due, come di y , e dire, poichè $x + y = a$, dunque (217) $x = a - y$, e sostituendo $a - y$ in luogo di x nella seconda equazione, ho $a - y - y = b$; o sia (136) $a - 2y = b$, e trasponendo (217) $a - b = 2y$,

in fine, dividendo (221), $\frac{a - b}{2} = y$: così conosco il valore di y , il che basta per isciogliere la questione.

Con una simile operazione si può far isvanir $a + b$
 y per avere il valore di x , e si troverà $x = \frac{a + b}{2}$

Così la questione è perfettamente sciolta; imperocchè, se in luogo di a , e di b sostituisco 100, e 30, avrò $x = \frac{100 + 30}{2} = \frac{130}{2} = 65$:

$$\text{ed } y = \frac{100 - 30}{2} = \frac{70}{2} = 35.$$

Dunque il padre dee avere 65 anni, e'l figlio 35.
 230. Poichè questa questione particolare è stata ridotta ad una questione generale, segue, che

che le equazioni $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$ ne danno

una soluzione generale; imperocchè egli è chiaro, che queste lettere rappresentando tutti i numeri possibili, ogni volta, che si proporrà di trovar due quantità x , y la cui somma a , e la differenza b è conosciuta, si vedrà, che la maggiore di queste due quantità, che qui è designata per x , sarà uguale alla metà della somma $a+b$ delle due quantità date; e che la minore notata per y sarà uguale alla metà della differenza $a-b$ di queste due quantità date.

231. L'equazioni, che danno la soluzione generale d'un problema si chiamano *formole*, poichè elleno rappresentano un metodo generale di sciogliere tutti i problemi possibili, che hanno le stesse condizioni di quello, che è stato risolto con queste equazioni.

Per esempio, se si proponga questa questione. *Pietro, e Giovanni hanno dato tutti due 14 soldi a' poveri; Pietro ha dato quattro soldi più, che Giovanni: quanto ha dato ciascuno?*

Egli è chiaro, che questo problema ha le stesse condizioni del precedente, poichè vi si domandano due quantità, delle quali si conosce la somma 14, e la differenza 4, e perciò la limosina di Pietro sarà espressa per x , quella di Giovanni per y , la somma 14 per a , la differenza 4 per b , ciò posto si troverà $x = \frac{a+b}{2}$

$$\frac{14+4}{2} = 9, \text{ ed } y = \frac{a-b}{2} = \frac{14-4}{2} = 5.$$

Dunque

Dunque Pietro ha dato 9 soldi, Giovanni 5.

232. Una formola espressa in parole dà dunque una regola generale. Per esempio, le formole $x = a + b$ $a - b$

$\frac{x+b}{2}$, $y = \frac{x-b}{2}$, che sono la stessa cosa, che

$x = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b$, ed $y = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b$, danno questa regola generale: Quando si conosce la somma, e la differenza di due quantità incognite, per avere la più grande bisogna aggiungere la metà della differenza alla metà della somma; e per avere la più piccola bisogna togliere la metà della differenza dalla metà della somma.

Egli è chiaro inoltre, che una Formola può esser enunciata come un Teorema; imperocchè le due formole si possono esprimere in questo modo: Di due quantità dissuguali la maggiore è uguale alla metà della loro somma più la metà della loro differenza; e la minore è uguale alla metà della somma meno la metà della loro differenza; e così sciogliendo coll'analisi i problemi particolari, si scoprono le proprietà generali della grandezza.

Noi abbiám discussa questa questione a lungo, dovendo ella servire di modello alla soluzione de' Problemi; saremo più succinti ne' seguenti esempi.

II. ESEMPIO. Pietro, e Giovanni, avendo insieme 36l. hanno perduto una doppia al giuoco (a); Pietro ha perduta la terza parte di quello, che aveva; e Giovanni la quinta; si domanda quanto aveva ciascuno prima del giuoco, e quanto ciascuno ha perduto?

In questo esempio, a prima vista pare, che

(a) Cioè lire 10.

vi siano quattro incognite, benchè realmente non ve ne siano, che due. Imperocchè quando si conoscerà ciò, che Pietro aveva prima del giuoco, il terzo di questa somma, che sarà la sua perdita, non fa una quantità incognita; e l'istesso è della perdita di Giovanni. Onde si può notare, che ...

233. *Il numero delle incognite non dipende dal numero delle domande, che si fanno in un problema: ma bisogna vedere prima di determinare il numero delle incognite, se la soluzione d'una domanda dà, o no la soluzione d'un'altra.*

Questione espressa in parole.

Questione espressa in lettere.

Si domandano due quantità . . .

$x, y?$

la cui somma è $36 = a$, . . .

$x + y = a$

ed il terzo della prima
più il quinto della secon-
da è 10, o sia b .

$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = b$

Bisogna prima liberar le frazioni della seconda equazione, che diviene $5x + 3y = 15b$, ed allora, se si prende $x = a - y$ (217) nella prima equazione, e si sostituisce questo valore in $5x + 3y = 15b$, si avrà $5a - 5y + 3y = 15b$, e riducendo, e poi trasponendo $2y = 5a - 15b$, e

dividendo (221) $y = \frac{5a - 15b}{2}$, il che basta per

la soluzione del problema: imperocchè, se si facciano le sostituzioni notate in questa formola, si avrà $y = 15$. Giovanni avea dunque 15l., e ne ha perdute 3, che è il quinto di 15, e per conseguenza Pietro avea 21l. perchè $15 + 21 = 36$,

ed ha perdute 7/., che sono il terzo di 21.

Se frattanto si volesse una formola per x ,

si troverà facendo svanire y , che $x = \frac{150-30}{2}$

III. ESEMPIO. *Un padre nel suo testamento distribuisce tutti i suoi beni fra' suoi figliuoli: dà al suo figlio maggiore 1000 scudi, col sesto di quello, che avanza, dopo che se gli ha presi; al secondo 2000 scudi col sesto di quello, che avanza; al terzo 3000 scudi, e' l sesto di quello, che avanza; e così fino all'ultimo, il quale averà l'avanzo delle parti de' suoi fratelli. Questa disposizione essendo eseguita, si trova, che ciascuno ha una stessa porzione. Si domanda quanti sono i figli, quanto ha avuto ciascuno, e quanto danaro ha lasciato il padre?*

Quantunque e' paja, che vi siano tre incognite, non pertanto esaminando a minuto la questione, si vedrà, che ve n'è solamente una; cioè il bene del padre: imperocchè quando questo sarà conosciuto, se ne toglieran 1000 scudi, che si sommeranno col sesto del restante, ciò, che darà la parte di ciascuno; e dividendo i beni del padre per una di queste parti si avrà il numero delle parti, cioè il numero de' figli.

Io fo dunque il bene del padre $= x$, i 1000 scudi $= a$, e dico, quando il maggiore avrà presi i suoi scudi, il resto de' beni sarà $x - a$; sopra questa somma egli dovrà prendere il se-

sto, che è $\frac{x-a}{6}$, e la sua parte sarà $a + \frac{x-a}{6}$,

e riducendo tutto in frazione (80) $\frac{5a+x}{6}$. Avendola

dola tolta da tutto l' avere, si ha $x = \frac{139}{5a-x}$.

Sopra questa somma il secondo prende $2a$, ed il ben, che resta diviene $x = \frac{5a-x}{6} - 2a$, che

si riduce a $\frac{5x-17a}{6}$, di cui si deve ancora prendere il sesto, il quale per conseguenza è $\frac{5x-17a}{6}$.

Di maniera, che la parte del secondo è $2a + \frac{5x-17a}{36}$, o sia $\frac{55a+5x}{36}$.

E poichè le parti si sono trovate uguali, si ha l' equazione $\frac{5a+x}{6} = \frac{55a+5x}{36}$: togliendo le frazioni, trasponendo, e riducendo si ha $6x = 150a$, e dividendo; $x = 25a$.

Ondel' avere del padre era 25×1000 scudi, cioè 25000 scudi: ciascuno ha avuto 5000 scudi: e i figliuoli eran cinque.

IV. ESEMPIO. Trovar un numero tale, che togliendo il suo quadruplo dal suo quadrato, resti 21.

L' equazione è $xx - 4x = 21$, o in generale $xx - bx = a$; or si vede dalle regole dell' estrazione delle radici, che ella deve divenire $xx - bx + \frac{1}{4}bb = a + \frac{1}{4}bb$; indi $x - \frac{1}{2}b = \sqrt{a + \frac{1}{4}bb}$: e ponendo 4,

e 21 in luogo di b , e di a , $x-2 = \sqrt{21+4} = \sqrt{25}$. Dunque $x-2=5$, ed $x=7$.

234. OSSERVAZIONI. I. Questo problema è del secondo grado, poichè l'incognita vi si trova elevata al quadrato. Or queste sorti di problemi hanno due soluzioni, e in generale

I Problemi determinati hanno tante soluzioni differenti, quante sono le unità, che si contengono nel più grande esponente dell'incognita.

La ragione, ne è, pe' problemi del secondo grado, che ogni quadrato ha due radici possibili: per esempio xx ha due radici, cioè x , e $-x$. In questo caso, per estrarre la radice da questa equazione, si avrebbe anco potuto mettere $-x$

$+ \frac{1}{2}b = \sqrt{a + \frac{1}{4}bb}$, ovvero $-x+2=5$, dunque $x=-3$: il che anche scioglie il problema, perchè il quadruplo di -3 , che è 12, essendo tolto dal quadrato di -3 , ch'è 9, dà $9+12=21$.

Similmente, se fosse stato proposto di trovar due numeri, la cui somma $= 17$, o sia a , ed il prodotto $= 60$, o sia b ; si avrebbe avuto $x+y=a$, ed $xy=b$, donde si sarebbe conchiuso $x=5$, ed $y=12$, o $x=12$, ed $y=5$. Or egli è chiaro, che, o si faccia $y=5$, ed $x=12$; o $y=12$, ed $x=5$, le condizioni del problema sempre s'adempiono. Donde segue, che ogni Problema, nel quale una delle due incognite può essere indifferentemente maggiore, o minore dell'altra è un problema, che ha due soluzioni, e per conseguenza è del secondo grado.

235. II. Un Problema, nel quale vi è un
in

incognita di più, che le condizioni, si chiama *indeterminato*: e si chiama *più che indeterminato*, quando il numero delle incognite è anche più maggiore.

Ne' Problemi indeterminati, non si può per mezzo delle regole precedenti ridurre una equazione ad aver meno, che due incognite, e allora siam obligati di supporre un valore ad una di queste due incognite, affinchè il valore dell' altra sia determinato in vigor di questa supposizione, e delle condizioni del problema; di maniera, che il problema può aver tante soluzioni, quanti valori diversi posson supporli ad una delle due incognite.

Sia, per esempio, questa questione. *Trovare tre numeri x, y, z , la cui somma sia 105, e che abbiano fra loro una stessa differenza.*

Le condizioni del problema non possono esprimersi, che per queste due equazioni $x + y + z = 105$, ed $x - y = y - z$. Prendendo dunque nella seconda equazione $x = 2 - z$, e sostituendola nella prima si troverà $y = 35$, e per conseguenza $x + 35 + z = 105$; donde si tira $x + z = 70$. Bisogna dunque supporre qualche valore ad una di queste incognite, poichè non si può fare svanirne x , nè z : e facendo, per esempio $x = 10$, si avrà $z = 60$, ed i tre numeri 10, 35, 60 potranno soddisfare alla questione. E, se si fa $x = 12$, si avrà $z = 58$, e i tre numeri 12, 35, 58, soddisfaranno ancora.

Si vede similmente, che questo Problema può avere 69 soluzioni in numeri interi, e positivi, poichè si può supporre x uguale successivamente a tutti i numeri dopo 1 sino a 69,
non

non però più in là , perchè la somma delle due incognite è 70 ; ma può avere una infinità di soluzioni , in supponendo x uguale a qualunque numero si vorrà minore di 70 , più qualunque frazione .

236. III. Ne' problemi indeterminati del primo grado si può dare ad un'incognita un valore arbitrario , fin' a tanto che lo stato della questione non lo comporti : come se si trattasse di trovare un certo numero incognito di cose indivisibili di lor natura , e che non si potessero rappresentare in frazioni , come di uomini , cavalli ec. Ma ne' problemi indeterminati del secondo grado , quando si vuol determinare il valore d' un' incognita elevata al quadrato , bisogna , che il valore supposto dell' altra incognita sia tale , che questo quadrato non divenga negativo , perchè la sua radice sarebbe impossibile .

Per esempio , nell' equazione $xx+y=b$ non si può dare ad y un valore maggiore di b , altrimenti xx diverrebbe negativo ; il quale quadrato è impossibile (225) .

237. Le radici delle potenze impossibili si chiamano *radici immaginarie* . Così $\sqrt{-xx}$ è una radice immaginaria ; ed è , come cosa dimostrata , che un problema è impossibile , quando le radici della sua equazione sono immaginarie : o almeno

Un Problema contiene tanti casi impossibili , quante radici immaginarie si contengono nella sua equazione .

Ecco alcune altre questioni proposte per esercitarsi .

I. *Pietro arrivando a Parigi ha speso il primo giorno il terzo di tutto il danaro , che vi avea portato ; il secondo giorno ne ha speso il quarto ,*
il

il terzo giorno il quinto; di maniera che ora non gli resta altro, che 26 lire. Si domanda quanti danari avea, entrando in Parigi.

* Risposta. 1201.*

II. Un Orefice compra per 318 lire una massa di metallo composta di 3 oncie d'oro, e 5 oncie d'argento; compra per 522 lire un'altra massa composta di 5 oncie d'oro, e 7 oncie d'argento. Si domanda il valore dell' oncia d'oro, e quello dell' oncia d'argento.

* Risposta. L' oncia d' oro 96l., l' oncia d' argento 6l.*

III. Pietro, Giacomo, e Giovanni hanno perduto tutto il loro danaro al gioco. Pietro, e Giacomo hanno insieme perduto 10 lire; Pietro, e Giovanni 11 lire; Giacomo, e Giovanni 9 lire. Si domanda quello, che ha perduto ciascuno in particolare,

* Risposta. La perdita di Pietro 6l. La perdita di Giacomo 4; e di Giovanni 5*.

IV. Un' Asina dice ad una mula: Se io t'aveffi dato uno de' miei sacchi noi avremmo carichi uguali; e se tu me ne facessi portare uno de' tuoi, io farei caricata per lo doppio. Si domanda quanti sacchi portava ciascuna?

* Risposta. I sacchi dell' Asina 7. I sacchi della mula 5*.

V. Pietro, e Giovanni prima di giocare avevano ugual somma di danari; Pietro ha perduto 12 lire, e Giovanni 57; di maniera, che nel sortir dal giuoco Pietro avea il quadruplo del danaro di Giovanni. Si domanda quanto danaro avea ciascuno prima di giocare.

* Risposta. 72l.*

VI. Si domanda a un Uomo quanti scudi ha?
Egli

Egli risponde, se voi aggiungete insieme la metà, il terzo, e'l quarto di quello, che io ne ho, la somma sorpasserà d'uno il numero de' scudi, che ho.

* Risposta. 12.*

VII. Un mercante compra tre cavalli; il prezzo del primo colla metà del prezzo degli altri due, monta a 25 doppie; il prezzo del secondo col terzo del prezzo degli altri due monta a 26 doppie; il prezzo del terzo colla metà del prezzo degli altri due monta a 29 doppie. Si domanda il prezzo di ciascun cavallo.

* Risposta. Il prezzo del primo 8, del secondo 18, del terzo 16*.

VIII. Un Artista avendo 6 lire in sua possa riceve quanto gli è dovuto per 5 settimane. Cinque giorni dopo non gli restava altro, che il quarto di tutto il suo danaro; ma avendo ricevuto quanto ha guadagnato per 2 settimane, si trova aver 21 lire. Quanto guadagnava egli per settimana?

* Risposta 6l*.

Della Natura, e delle Proprietà Generali delle Equazioni di differenti gradi.

138. **P**ER istabilir le regole per lo calcolo delle equazioni di tutti i gradi, si costuma di metterne tutti i termini nel primo membro, e 0 nel secondo membro; si scrivono similmente i termini del primo membro secondo l'ordine decrescente degli esponenti dell'incognita, il che si chiama ordinare un'equazione. Si deve scrivere, per esempio, $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x - 258 = 0$.

Si chiama equazione compita, o quella che ha tutti i termini, quella nella quale l'ordine decrescente

sciente degli esponenti dell'incognita è secondo la serie naturale de' numeri senza interruzione, e che ha di più un termine tutto composto di quantità cognite; tal'è la precedente.

Così un'equazione compita deve avere un termine di più, che le unità, che sono nel più grand' esponente dell'incognita: un'equazione compita del 4 grado deve aver 5 termini.

239. I termini d'un'equazione prendono il loro nome dall'ordine, nel quale devono trovarsi, supponendo l'equazione compita, ed ordinata. Così si chiama primo termine quello, nel quale l'incognita ha il più grande esponente: secondo termine quello nel quale l'esponente della stessa incognita è più piccolo di un'unità: terzo termine quello nel quale l'esponente è ancora più piccolo di una unità; infine, ultimo termine quello, che non contiene più incognita: di maniera che, se vi è qualche interruzione nella progressione decrescente delle potenze dell'incognita, l'equazione è imperfetta; e quando si dice, che vi manca tale, o tal termine, sono quelli, i quali si dovrebbero trovare ne' luoghi, ne' quali vi sono le interruzioni: per esempio, $x^5 - 3x^3 + xx - b = 0$ è una equazione imperfetta, nella quale manca il secondo, e 'l quinto termine.

240. Si può considerare ogni equazione come il prodotto di più equazioni d'un grado inferiore: (a) noi le considereremo prima, come il prodotto di tante equazioni del primo grado, quante sono le unità nel più grande esponente dell'incognita dell'equazione composta. Per esempio, se si fa $x-1=0$,

K

x-3

(a) E qui s'avverta, che il primo termine d'ogni equazione composta non dee esser moltiplicato giammai per alcuna quantità; e se mai lo fusse, che ne sia disimpegnato per mezzo della divisione.

$x-3=0$, $x-4=0$, moltiplicando insieme queste tre equazioni si ha $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$.

Di maniera che per stabilire un teorema generale delle equazioni di tutti i gradi, si possono costruire delle formole algebriche, dando ad x differenti espressioni di valori, secondo tutte le combinazioni de' segni.

Per esempio, le combinazioni possibili de' segni per tre valori d' un' incognita, sono o che i tre valori dell' incognita siano tutti e tre positivi, o tutti e tre negativi: o uno positivo, e due negativi: o due positivi, ed uno negativo: si possono dunque stabilire per tutte le equazioni del terzo grado le quattro formole, che seguono.

$$\left. \begin{array}{l} x-a=0 \\ x-b=0 \\ x-c=0 \end{array} \right\} \dots x^3 - xx(a+b+c) + x(ab+ac+bc) - abc = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x+a=0 \\ x+b=0 \\ x+c=0 \end{array} \right\} \dots x^3 - xx(-a-b-c) + x(ab+ac+bc) + abc = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x-a=0 \\ x-b=0 \\ x+c=0 \end{array} \right\} \dots x^3 - xx(a+b-c) + x(ab-ac-bc) + abc = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x-a=0 \\ x+b=0 \\ x+c=0 \end{array} \right\} \dots x^3 - xx(a-b-c) + x(-ab-ac+bc) - abc = 0.$$

Suppongo, che si siano costrutte simili formole per tutti i casi possibili del quarto, quinto ec. grado: esaminandole, noi troveremo, che le proprietà seguenti sono conseguenze necessarie della loro costruzione (a).

241.

(a) Queste equazioni sono formate dal prodotto di differenti valori reali (e non immaginari) d' una medesima quantità.

241. TEOR. I. Ogni equazione composta del prodotto di più equazioni semplici, che esprimono differenti valori d'una stessa incognita, è d'un grado espresso dal numero de' valori di questa incognita: or ogni equazione puramente algebrica può esser presa per una formola generale, che racchiude una proprietà generale della grandezza: si può dunque dire, che ogni equazione ha tante radici, quante sono le unità al numero, che ne esprime il grado.

242. TEOR. II. La somma di tutte le radici d'una equazione forma il coefficiente del secondo termine: la somma de' prodotti di queste stesse radici prese due a due forma il coefficiente del terzo termine: la somma de' prodotti di queste stesse radici prese tre a tre forma il coefficiente del quarto termine ec. (a), e'l prodotto di tutte queste radici prese insieme forma l'ultimo termine.

243. TEOR. III. Quando le radici d'una equazione sono tutte positive, i termini sono alternativamente preceduti da' segni +, e —. Quando elleno sono tutte negative, tutti i termini sono positivi; quando vi sono radici positive, e radici negative, l'ordine de' segni non è costante.

244. TEOR. IV. Il secondo termine deve mancare in una equazione, nella quale la somma delle radici si riduce a zero, o quando la somma delle radici positive è uguale alla somma delle radici negative. Poichè ogni prodotto

K 2 per

(a) S'intenda qui per Coefficiente quella quantità cognita, che moltiplica l'incognita in ciascun termine. Questo coefficiente, (nelle quattro formole accennate di sopra) si trova sempre racchiuso fra due parentesi.

per zero è uguale a zero. E in generale.

Se un termine manca in una equazione, è segno manifesto, che tutte le radici non hanno uno stesso segno, poichè il coefficiente di questo termine non ha potuto essere distrutto per altra cosa, se non perchè essendo formato dalla somma di più prodotti, se ne sono trovati de' negativi, che hanno fatto svanire i positivi, il che non ha potuto accadere per altra maniera, se non perchè le quantità, che hanno formati questi prodotti avevano differenti segni.

245. TEOR. V. Se il secondo termine d' un' equazione è positivo, la somma delle radici positive eccede quella delle radici negative: e se è negativo la somma delle radici negative eccede quella delle radici positive.

246. TEOR. VI. Se il numero delle radici positive è pari, l'ultimo termine è positivo; se è dispari l'ultimo termine è negativo, e reciprocamente.

247. TEOR. VII. Un' equazione, che non ha ultimo termine è d' un grado inferiore a quello, che è notato dalla più alta potenza dell'incognita; imperocchè, se si fosse supposta una delle radici uguale a zero il prodotto di tutte le radici prese insieme sarebbe $= 0$ (a).

Or in questo caso egli è evidente, che l'equazione $x^3 - ax^2 + bx = 0$ non è realmente, che una equazione del secondo grado, poichè tutti i suoi termini si possono dividere esattamente per x , e ridurla ad $xx - ax + b = 0$.

248. TEOR. VIII. Se in una equazione si so-

(a) E più chiaramente: perchè allora l'incognita, che si trova in tutti i termini dell'equazione, può esser cancellata per mezzo della divisione (223), onde ciascun termine vien ad esser abbassato d' un grado.

sostituisce all'incognita uno de' suoi valori, tutta l'equazione sarà ridotta a 0.

Per esempio, se nella prima formola (240) si pone a^3 , a^2 , a , in luogo di x^3 , x^2 , x^1 , si avrà $a^3 - aa(a+b+c) + a(ab+ac+bc) - abc = 0$, che si riduce ad $a^3 - a^3 - aab - aac + aab + aac + abc - abc$.

COR. I. L'incognita equivale indistintamente a ciascuna delle radici dell'equazione.

COR. II. Si può star sicuro d'aver trovato il vero valore d'una delle radici d'un'equazione, quando si riduce tutta l'equazione a zero, sostituendo questa radice all'incognita.

Delle Equazioni, che contengono radici immaginarie.

249. **I** Radicali immaginari, che hanno la stessa quantità sotto il segno radicale, come $\sqrt{-a}$; $-\sqrt{-a}$, possono per la loro moltiplicazione formare un prodotto reale, se si moltiplichino due a due, quadrato a quadrato ec. sempre a numero pari.

Imperocchè il segno radicale non può svanire, se non si moltiplichino il termine che n'è affetto, per un'altro termine, che abbia lo stesso segno radicale, e la stessa quantità sotto questo segno: Ma questo segno essendo così svanito, se si moltiplichino il prodotto della prima moltiplicazione per lo stesso radicale, il nuovo prodotto sarà affetto dal segno radicale; ma, se si moltiplichino ancora per lo stesso radicale, il segno radicale anche svanirà, e così degli altri (a).

K 3

Se

(a) Egli è chiaro, che a ha per radici quadrate $+\sqrt{a}$, e $-\sqrt{a}$: il quale prodotto $+\sqrt{a} \times -\sqrt{a} = -a$: come anche quello di $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$, o di $-\sqrt{a} \times -\sqrt{a} = a$. Per questa stessa ragione $-a$ de' avere per radici quadrate le due quantità immaginarie $+\sqrt{-a}$, e $-\sqrt{-a}$.

Se uno de' termini d'un polinomio è un radicale immaginario, come, se si ha $x - a - \sqrt{-b}$, il segno radicale potrà svanire, se si moltiplichi questo polinomio per un altro polinomio, che ne differisca solo per lo segno, che precede il radicale. Così non vi è, che il solo prodotto di $x - a - \sqrt{-b}$ per $x - a + \sqrt{-b}$, che possa fare svanire il segno radicale nel polinomio proposto, dando $xx - 2ax + aa + b$, perchè in questo solo caso i prodotti particolari di ciascun termine reale per $\sqrt{-b}$, si distruggono per mezzo de' segni contrarj (a), ed in questo stesso caso egli è chiaro, che il termine b , che contiene il prodotto de' due radicali $+\sqrt{-b} \times -\sqrt{-b}$ è neces-
se.

$-\sqrt{-a}$ di maniera che il loro prodotto $+\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a}$ de' essere $= +a$; e che quello di $+\sqrt{-a} \times +\sqrt{-a}$, o di $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a}$ de' esser $= -a$. Donde si vede in generale, che il prodotto delle quantità immaginarie, può presentarsi sotto la forma d'una quantità reale; e che perciò un'equazione composta può rinchiusere radici immaginarie. Noi non parliamo quì, che di quelle quantità immaginarie, che son espresse dalle radici quadrate di quantità negative, poichè queste sono le sole di cui si faccia uso nella soluzione delle equazioni di tutt'i gradi. Or nella moltiplicazione de' radicali di quella specie, il segno radicale non può svanire, se non si moltiplichino a due a due quei, che hanno le medesime quantità sotto il segno: quindi $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = -a$; ma $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = -a\sqrt{-a}$, e $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = a$; ma $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = -a\sqrt{-a}$; &c. Similmente $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$; ma $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} = ab$, e $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$, &c. Quindi segue, che una quantità reale non può rappresentar il prodotto de' radicali immaginarj, se non sian essi moltiplicati fra di loro ciascuno in numero pari.

(a) Quindi i prodotti di $x - a$ per $\sqrt{-b}$ son distrutti da' segni contrarj de' proceffi di $x - a$ per $-\sqrt{-b}$.

ariamente positivo. Ciò posto....

250. TEOR. IX. Le radici immaginarie, che si trovano in una equazione vi sono sempre a numero pari.

251. TEOR. X. Le radici immaginarie prese due a due in una equazione hanno la stessa quantità sotto il segno radicale, e differiscono solo pe' segni $+$ e $-$.

252. TEOR. XI. Ogni equazione d'un grado impari ha almeno una radice reale.

253. TEOR. XII. Ogni equazione ordinata d'un grado pari, il cui ultimo termine è negativo, ha almeno una radice reale, poichè i prodotti cogniti, che sono formati da' radicali immaginari sono sempre positivi.

Riduzioni, e trasformazioni delle Equazioni.

254. **P**ER operare più comodamente sopra le equazioni, si riducono all' espressioni le più semplici, che sia possibile. Per esempio, la prima formola generale delle equazioni del terzo grado (240) si riduce a questa què $x^3 - pxx + qx - r = 0$, facendo $p = a + b + c$, $q = ab + ac + bc$, $r = abc$.

Quindi è chiaro, che si può trasformare una equazione proposta in un' altra equazione dello stesso grado, nella quale l' incognita dell' equazione proposta abbia avuto quel cambiamento cognito, che si avrà voluto: cioè a dire, che ella sia stata aumentata, o minorata d' una quantità f data, che la sia stata moltiplicata, o divisa per una quantità f data, che la sia all' incognita della nuova equazione nel rapporto dato di f a g ; sia che f sia una quantità cognita, o determinata, sia che f sia incognita, od indeterminata. Imperocchè per ciò basta

secondo i casi proposti, di fare $y + f = x$, ed

$$y - f = x, \text{ o } yf = x, \text{ o } \frac{y}{f} = x, \text{ o } \frac{fy}{f} = x, \text{ e sostitui-$$

re ad x di questi valori quello, di cui si tratta.

Per esempio, se io so $y + f = x$, sostituendo ad x^3 il cubo di $y + f$, a pxx il prodotto di p per lo quadrato di $y + f$, ed a qx il prodotto di q per $y + f$: avendo ordinata la nuova equazione, io trovo $y^3 + yy(3f - p) + y(3ff - 2pf + q) + f^3 - 2pf + qf - r = 0$ per la trasformata.

255. Indi si vede, che, se io avessi preso $f = \frac{1}{2}p$, il secondo termine $+yy(3f - p)$ sarebbe svanito, imperocchè allora $3f - p = 0$. Applicando questa osservazione alle formole generali, che rappresentano ciascuna equazione, si trova, che si può togliere il secondo termine da una equazione qualunque trasformandola in un'altra per mezzo d'una nuova incognita, più o meno il coefficiente del secondo termine diviso per l'esponente della più alta potenza dell'incognita, secondo che il secondo termine dell'equazione proposta è negativo, o positivo.

Si potrebbe secondo la stessa osservazione, trovare una trasformata, che mancasse del terzo, o del quarto, o del quinto termine ec. ma la quantità, che bisognerebbe aggiungere a y non si troverebbe, che per la soluzione del secondo, del terzo, o quarto grado: poichè nel terzo termine $y(3ff - 2pf + q)$ della trasformata, non si può prendere il valore di f che sciogliendo l'equazione del secondo grado $3ff - 2pf + q = 0$.

Per isciogliere l'equazioni composte, e trovare in numeri i valori delle incognite.

L A maggior difficoltà, che s'incontra nella soluzione de' problemi, che si riducono ad equazioni

un poco elevate, consiste nell' estrarne le radici così algebricamente, come in numeri; cioè a dire a trovar ciascuno de' valori dell' incognita per una formula algebrica particolare, o per un numero. Quantunque questo sia propriamente l' oggetto dell' Algebra, noi non ci potremo estendere su quest' articolo, perchè le differenti ricerche, che i matematici han fatte su di questo soggetto, hanno prodotta una teoria complicatissima, ed un gran numero di metodi: si possono consultare i trattati d' Algebra, come l' *Analisi dimostrata di Réyneau*, l' *Aritmetica Universale di Newton con commentarj* &c.

Noi ci contenteremo dunque di spiegare què due metodi per trovare in numeri le radici dell' equazioni di tutti i gradi: Il primo è buono, quando le radici reali sono numeri interi, ed il secondo, quando questi numeri sono congiunti a frazioni.

256. METODO I°. Cercate tutti i divisori (156) dell' ultimo termine dell' equazione: se le radici dell' equazione sono numeri interi, elleno devono trovarsi fra questi divisori, perchè (242) l' ultimo termine è il prodotto di tutte le radici. E poichè sostituendo una delle radici dell' equazione in luogo dell' incognita, tutta l' equazione si riduce a zero, sostituite successivamente questi divisori, finchè tutta l' equazione si riduca a zero: il numero, che per la sua sostituzione avrà prodotta questa riduzione, sarà una delle radici cercate. Sia proposta l' equazione $x^4 - 8x^3 + 15xx - 24x + 36 = 0$, i divisori di 36 sono 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 9, -9, 12, -12, 18, -18, 36, -36; per la sostituzione successiva di queste quantità, io trovo, che 2 è una delle radici, perchè l' equazione diviene $16 - 64 + 60 - 48 + 36 = 0$.

2°. Di-

2°. Dividete l'equazione proposta per l'equazione, che dà la radice trovata (come qui $x - 2 = 0$), il quoziente ne deve essere giusto, e l'equazione abbassata d'un grado: in effetto si trova $x^3 - 6xx + 3x - 18 = 0$: prendete similmente i divisori dell'ultimo termine, che sono 1, -1, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18: sostituiteli successivamente nella nuova equazione, finattantochè ella venga a ridursi a zero (or non è necessario impiegarvi i divisori, che non sono riusciti nella prima equazione) ed avrete un'altra radice; in quest'esempio 6 riduce l'equazione a $216 - 216 + 18 - 18 = 0$: dunque 6 è una delle radici.

3°. Dividete l'equazione di già abbassata d'un grado per quella, che dà il valore della nuova radice, il quoziente ne dev'essere giusto, e l'equazione ancora abbassata d'un grado: Operate sempre come qui sopra finattanto che l'equazione si trovi del secondo grado facile ad sciogliersi, o che si trovi del primo grado. Così dividendo $x^3 - 6xx + 3x - 18 = 0$ per $x - 6 = 0$, trovo $xx + 3 = 0$, equazione del secondo grado, le cui radici sono facili ad estrarre, e sono immaginarie cioè $-\sqrt{-3}$, $+\sqrt{-3}$. Questo metodo è appunto l'inverso delle operazioni, per le quali noi abbiamo dimostrata (240) la formazione delle equazioni (a).

257. METODO II°. Sia proposta l'equazione

$$1 + 2x^3 - 36x^2 + 5x - 116 = 0.$$

1°. Sostituite nell'equazione proposta successivamente 1, 2, 3, 4, ec. in luogo dell'incognita, finattantochè voi troviate, che la quantità nella quale

(a) Questo metodo può applicarsi soltanto alle equazioni puramente algebriche, che saranno sotto la medesima forma di quella, sotto la quale noi al §. 240 abbiamo le formole generali.

le l'equazione è ridotta per ciascuna sostituzione, viene a mutar segno: allora la radice sarà un numero positivo minore di quello, che avrà preceduto immediatamente questo cambiamento di segno, e maggiore di quello, nel quale il cambiamento sarà avvenuto. Ho dunque sostituendo.

$$\begin{aligned} 1 \dots 1 + 2 - 36 + 5 - 116 &= -144 \\ 2 \dots 16 + 16 - 144 + 10 - 116 &= -218 \\ 3 \dots 81 + 54 - 324 + 15 - 116 &= -290 \\ 4 \dots 256 + 128 - 576 + 20 - 116 &= -288 \\ 5 \dots 625 + 250 - 900 + 25 - 116 &= -116 \\ 6 \dots 1296 + 432 - 1296 + 30 - 116 &= +346. \end{aligned}$$

E per conseguenza una delle radici positive è tra 5, e 6.

2°. Chiamo d la frazione che congiunta a 5 deve dar la radice più precisa: ho dunque $x = 5 + d$: (potrei fare $6 = a$, ed $x = 6 - d$) Sostituisco $5 + d$ ad x , nell'equazione proposta, ed ho...

$$\begin{aligned} + x^4 &= +625 + 500d + 150dd + 20d^3 + d^4. \\ + 2x^3 &= +250 + 150d + 30dd + 2d^3 \\ - 36x^2 &= -900 - 360d - 36dd \\ + 5x &= +25 + 5d \\ - 116 &= -116. \end{aligned}$$

$$-116 + 295d + 144dd + 22d^3 + d^4.$$

Il che mi dà una trasformata nella quale il valore di d esprime la frazione cercata. Or perchè (159) le potenze delle frazioni sono quantità tanto più piccole, quanto sono più piccole queste frazioni, e quanto le loro potenze sono più alte, si può supporre prima $22d^3 + d^4 = 0$, e cercare il valore di d per l'equazione del secondo grado $-116 + 295d + 144dd$, si troverà in decimali $d = 0,33758$ e per conseguenza $x = 5,33758$ pressò a poco.

Ma

Ma, perchè la frazione d non è tanto piccola in se stessa, che si possa supporre senza errore $22d^3 + d^4 = 0$, bisogna ricominciare il calcolo; bisogna sostituire 5, 337 in luogo di x nell'equazione proposta, ella diverrà (non portando i decimali al di là di 6) $+811, 313703 + 304, 033616 - 1025, 408484 + 26,685 - 116 = 0$, 623835: la quantità positiva 0,623835, alla quale questa equazione si trova ridotta, mi fa vedere, che la radice supposta $x = 5, 337$ è troppo grande; nello stesso modo che 6, radice troppo grande, ha ridotta l'equazione alla quantità positiva $+346$. Fè dunque $x = 5, 337 - d$, che sostituisco ad x come qui sopra, trasportando i termini, dove le potenze di d passano il quadrato, ed ho.

$$\begin{array}{r}
 + x^4 = +811, 313703 - 608, 067231d \\
 + 170, 901414dd \\
 + 2x^3 = +304, 033616 - 170, 901414d \\
 + 32, 022000dd \\
 - 36x^2 = -1025, 408484 + 384, 264000d \\
 - 36, 000000dd \\
 + 5x = +26, 685000 - 5, 000000d \\
 - 116 = -116 \\
 \hline
 + 0, 623835 - 399, 704645d \\
 + 116, 923414dd
 \end{array}$$

Nuova trasformata, o equazione del secondo grado, nella quale io trovo $d = 0, 001562$ (a): tolgo que-

(a) L'autore ha voluto qui spingere il calcolo troppo innanzi, senza necessità, e s'è ingannato: giacchè in questa equazione $+0, 623835 - 399, 704645d + 116, 923414dd$, si trova il valore di d non già uguale a 0, 001562, ma bensì $d = 2 +$ una quantità considerabile assai di decimali; come dal estrarne la radice si vedrà facilmente.

questo valere da 5 . 337 , ed ho la radice cercata, molto più esattamente $x=5,335538$. Tutte queste operazioni si possono fare con molta facilità coll'ajuto de' Logaritmi ordinarij, quando non si ha bisogno di più di 7 cifre per esprimere la radice colla sua frazione.

Si può cercare similmente la radice negativa, sostituendo successivamente ad x i numeri -1 , -2 , -3 , -4 , -5 ec.

258. Nelle ricerche , nelle quali s' impiegano queste sorte di equazioni si fa quasi sempre pressoa poco quale radice si deve trovare , e quale è quella delle radici , che è utile alla ricerca attuale ; e che fa evitare molti tastoni , perchè si sostituiscono solamente i numeri , che siano i più approssimanti a quello , che si conoscerà poi poco dopo (a) .

Quando si è trovata una delle radici con questo metodo si possono continuar le sostituzioni de' numeri per trovare un' altra , o divider l' equazione per questa

(a) Quando in un' equazione vi sono radici , che non differiscono fra di loro più che d' una unità , la serie de' numeri , che risultano dalle sostituzioni di 1 , 2 , 3 , &c. ordinariamente non cambia di segno : ma questi numeri dopo che sono sempre divenuti minori, solo s' approssimano al cambiamento del segno, ma non lo cambiano, e cominciano di nuovo a crescere . Così nell' equazione $x^3 - 2x^2 - 20x + 53 = 0$, se si sostituiscono 1, 2, 3, 4; 5, 6, ec. si trovano questi numeri 32, + 13, + 2, + 5, + 28, + 77, ec. In questo caso il numero il più piccolo, il quale più s' avvicina al cambiamento del segno, serve a indicare, ch' egli è il numero (tra que' che si sono sostituiti) che più s' approssima al valore d' una delle radici . Così 2, che risulta dalla sostituzione di 3, indica che il numero intero, che più s' avvicina ad una delle radici è 3 . Ne trovo poscia il valore più esatto, come quì sopra, sostituendo 3 + d nell' equazione , per aver una trasformata, ove il valore di d mi dà la frazione , che bisogna aggiungere a 3.

sta radice per abbassarla d' un grado , e per trovare un' altra radice collo stesso metodo , il cui calcolo n' è facile , a proporzione che l' equazione ha meno termini , e che i loro coefficienti seno più piccoli : si troverà per esempio , che l' equazione data sarà ridotta a questa què .

$$x^3 + 7,33544x^2 + 3,13777x + 21,74137 = 0.$$

Della Comparazione delle Grandezze .

O V V E R O

Trattato delle Ragioni , e Proporzioni .

259. **S**I chiama in generale *Ragione* , o *Rapporto* la Comparazione di due quantità ; o pure la maniera cui l' una è a riguardo dell' altra .

Si paragonano due quantità per sapere , se elleno sono uguali , o come l' una supera l' altra , o pure quante volte l' una contiene l' altra . Per esempio , posso paragonare 4 a 12 , cercando , se $4 = 12$, o quanto 4 supera 12 , o quante volte 4 è contenuto in 12 .

Il primo de' due termini , che si paragonano , si chiama l' *antecedente* , e 'l secondo il *conseguente* .

260. Non si paragonano ordinariamente , che le quantità dissuguali , o delle quali non se ne conosce l' uguaglianza ; e però , quando si paragonano due quantità per sapere di quanto l' una supera l' altra , questo paragone si chiama un rapporto , o una *Ragione Arimmetica* ; e quando si cerca quante volte l' una contiene l' altra , tal paragone si chiama un rapporto , o una *Ragione Geometrica* .

Quin-

Quindi è facile di comprendere, che ogni rapporto consiste in una quantità, che esprime la maniera, nella quale l'antecedente è a riguardo del conseguente; onde segue.

261. 1^o. Che un rapporto arimmetico consiste in una quantità, che esprime la differenza, che vi è tra l'antecedente, e 'lconsequente, o tra 'lconsequente, e l'antecedente; e che un rapporto geometrico consiste nel quoziente dell'antecedente diviso per lo conseguente, o del conseguente diviso per l'antecedente.

262. II^o. Che due termini sono nella stessa ragione con due altri, o che due ragioni sono uguali, quando le differenze, o i quozienti sono uguali.

Così, perchè l'eccesso di 7 sopra 3 è l'istesso, che quello di 9 sopra 5, cioè 4, egli è chiaro, che il rapporto arimmetico di 7 a 3 è uguale a quello di 9 a 5, o che 7 è a 3 nella stessa ragione arimmetica di 9 a 5.

Similmente, perchè 3 è contenuto in 12 tante volte quante 2 in 8, cioè 4, e che così il quoziente della ragione di 3 a 12 è lo stesso, che quello della ragione di 2 a 8, egli segue che 3 è a 12 nella stessa ragion geometrica di 2 a 8, o che queste ragioni sono uguali.

263. Quando le differenze, o i quozienti uguali di due ragioni, che si paragonano fra loro, risultano da due operazioni fatte nello stesso ordine, cioè a dire le differenze, togliendo ciascun antecedente dal suo conseguente, o ciascun conseguente dal suo antecedente; e i quozienti dividendo ciascun antecedente pel suo conseguente, o ciascun conseguente pel suo antecedente, le ragioni uguali sono chiamate ragioni.

gioni dirette. Così 3 è a 12 in ragion diretta di 2 a 8, perchè dividendo 3 per 12 si ha lo stesso quoziente $\frac{1}{4}$, che dividendo 2 per 8. E quando le differenze uguali, o i quozienti uguali risultano da operazioni fatte in un ordine rovescio, per esempio, togliendo da un lato l'antecedente dal suo conseguente, e togliendo dall'altro il conseguente dal suo antecedente, o dividendo da un lato l'antecedente per lo conseguente, e dall'altro il conseguente per l'antecedente, i termini di queste due ragioni si dicono essere *in ragion inversa, o reciproca*: Così i termini 12, e 3 son in ragion reciproca geometrica di 2, e 8; sono nella stessa ragione perchè hanno uno stesso quoziente 4; ma questa ragione è inversa, perchè quel quoziente risulta, nella prima ragione, dall'antecedente diviso pel suo conseguente, e nella seconda, dal conseguente diviso per l'antecedente.

Onde ne segue, che i quattro termini di due ragioni inverse uguali possono esser posti in ragion diretta; facendo cangiare il sito ad uno de' due termini d'una di queste due ragioni.

264. III°. Che l'ineguaglianza di diverse ragioni, che si paragonano consiste in quella delle loro differenze, o de' loro quozienti. Ma per istabilire una regola sicura da determinare questa disuguaglianza bisogna convenire dell'ordine nel quale si opererà, per trovare le differenze, o i quozienti delle ragioni, che si paragonano.

265. I quattro termini di due ragioni dirette uguali formano una *proporzione*, la quale è aritmetica, o geometrica secondo la specie di queste due ragioni. Così i quattro termini

7, 3, 9, 5 formano una proporzione arimmetica: e per designare, che questi termini fanno una tal proporzione si scrivono così $7:3:9:5$, ovvero $7.3=9.5$. Similmente i quattro termini 3, 12, 2, 8, formano una proporzione geometrica, e per designarla si scrivono così $3:12::2:8$, o pure $3:12=2:8$, o anche $3 \mid 12 \parallel 2 \mid 8$.

266. Il primo, e l'ultimo termine d'una proporzione si chiamano gli *estremi*; ed il secondo, e terzo si chiamano i *mezzi*.

267. Accade il più delle volte, che il conseguente della prima ragione d'una proporzione è anche antecedente della seconda ragione, per esempio, si può avere questa proporzione arimmetica, $a.b:b.d$, o pure questa geometrica $a:b=b:c$, allora queste sorti di proporzioni si chiamano *continue*. La proporzione arimmetica continua si scrive così $\div a.b.c$, e la geometrica $\div a.b.c$, nella quale il secondo termine si chiama *il mezzo proporzionale*.

268. La proporzione continua, che ha più di tre termini, diviene una *progressione crescente*, o *decrecente*; così $\div 3.6.9.12.15.18$ ec. è una progressione arimmetica crescente $\div 32.16.8.4.2$. è una progressione geometrica decrecente. Similmente la serie naturale de' numeri 0. 1. 2. 3. 4. 5. ec. forma una progressione arimmetica crescente.

269. Dunque in generale una *progressione arimmetica* è una serie di termini, che presi successivamente hanno sempre una stessa differenza; e una *progressione geometrica* è una serie di termini, che divisi successivamente l'un per l'altro hanno sempre uno stesso quoziente.

L

Pro-

*Proprietà delle Ragioni, Proporzioni, e
Progressioni Arimmetiche.*

270. **T**EOREMA I. Ogni rapporto Arimmetico si può ridurre ad una di queste forme $a. a \pm d$, ovvero $b. b \pm d$ ec. O sia, cioè che è lo stesso, il conseguente d'una ragione arimmetica è uguale all' antecedente, più o meno la loro differenza.

DIMOSTRAZIONE. Ogni quantità può esprimersi per a , ed essere l' antecedente d' una ragione arimmetica; ma a , essendo l' antecedente, egli è o più grande, o più piccolo del suo conseguente. Se a è più grande sorpassa il suo conseguente d'una quantità, o differenza, che può chiamarsi d ; dunque allora il conseguente è $a - d$: se a è più piccolo del suo conseguente, ne è sorpassato d'una quantità, che può chiamarsi d , ed in questo caso il conseguente è $a + d$; dunque in ogni rapporto arimmetico il conseguente è uguale all' antecedente più, o meno la loro differenza: (più, o meno s' esprime per $\pm$) dunque ogni rapporto arimmetico può esser rappresentato per $a. a \pm d$ ec. (a).

271. **T**EUR. II. Ogni proporzione arimmetica può esser rappresentata così $a. a \pm d = b. b \pm d$.

DIMOSTRAZ. Poichè due rapporti arimmetici sono uguali (262) quando hanno una stessa differenza, e poichè (270) ogni rapporto arimmetico

(a) Similmente si dimostra, che chiamando b una quantità qualunque, e d la differenza da un' altra quantità, il rapporto arimmetico tra queste due quantità sarà $b. b \pm d$. E se si chiamasse c un' antecedente qualunque, ed f la differenza dal suo conseguente, la formula del loro rapporto (270) sarebbe $c. c \pm f$.

metico si può esprimere per $a . a \pm d$,
o per $b . b \pm d$ (not. §. 270.), e' segue, che
la differenza d essendo la stessa, si avrà sempre
 $a . a \pm d = b . b \pm d$.

272. TEOR. III. *In una proporzione arimmetica la somma degli estremi è uguale alla somma de' mezzi.*

Ciò è evidente nella proporzione $a . a \pm d = b . b \pm d$, poichè la somma degli estremi è $a + b \pm d$, e quella de' mezzi è $a \pm d + b$, che è la stessa cosa, che $a + b \pm d$; or questo fa vedere, che in una proporzione arimmetica che fusse espressa per termini differenti fra di loro, come $a . b = c . d$, si ha sempre $a + d = b + c$.

273. COR. I. *In una proporzione continua la somma degli estremi è uguale al doppio del mezzo: imperocchè $\div a, b, c$, è la stessa cosa, che $a . b = b . c$ dunque $a + c = 2b$.*

274. COROL. II. *In una proporzione arimmetica, quando vi è un termine incognito, è facile trovarne il valore. Imperocchè, se si pone x in luogo di questo termine, avendo disposti gli altri in proporzione, e fatta un'equazione della somma degli estremi, e de' mezzi, si dedurrà facilmente il valore del termine incognito.*

Per esempio, se voglio avere il quarto termine d'una proporzione arimmetica, della quale ne conosco i tre primi a, b, c ; io fo $a . b = c . x$, dunque (272) $a + x = b + c$, e trasponendo, $x = b + c - a$ formola, che significa, che il quarto termine d'una progressione arimmetica è uguale alla differenza fra la somma de' mezzi, e' l primo termine.

Se si domanda qual'è il mezzo proporzionale arimmetico fra a e b , fo $\div a . x . b$; dun-

que $a + b = 2x$, e facendo le riduzioni $x = \frac{a+b}{2}$

— . Il che s' esprime così : La metà della

somma de' due estremi è uguale al loro mezzo proporzionale arimmetico .

275. TEOR. IV. Ogni progressione arimmetica può ridursi a questa $\div a . a \pm d . a \pm 2d . a \pm 3d . a \pm 4d . a \pm 5d . a \pm 6d . a \pm 7d$ ec. e così degli altri all' infinito .

DIM. Poichè (270) ogni rapporto può esprimersi per $a . a \pm d$, e poichè (269) una progressione arimmetica è una serie di termini , che hanno sempre una stessa differenza , e' segue , che la differenza fra'l primo termine a , e'l secondo $a \pm d$, essendo $\pm d$, la differenza fra'l secondo e terzo dev' essere anche $\pm d$: dunque il terzo termine dev' essere $a \pm d \pm d$, cioè a dire , $a \pm 2d$; similmente la differenza fra'l terzo, e quarto dev' essere $\pm d$, dunque il quarto termine dev' essere $a \pm 2d \pm d$, ovvero $a \pm 3d$, e così degli altri .

276. OSSERVAZIONE . Questa formola generale comprende la progressione arimmetica crescente, e la decrescente. La Progressione crescente è $\div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d$ ec. La Decrescente è $\div a . a - d . a - 2d . a - 3d . a - 4d$ ec.

277. COROLLARIO I. In una progressione arimmetica la somma de' termini ugualmente lontani dagli estremi , è uguale alla somma degli stessi estremi , o alla somma di due altri termini qualunque ugualmente lontani da questi estremi , o al doppio del termino di mezzo , se la progressione ha un numero spari di termini .

Così

Così nella progressione precedente, la somma del terzo, e del sesto termine, cioè $a \pm 2d + a \pm 5d$, o sia $2a \pm 7d$ è uguale alla somma degli estremi, che sono a , ed $a \pm 7d$, cioè, $2a \pm 7d$, e similmente alla somma del secondo, e del settimo, che è anche $2a \pm 7d$.

278. II. In una progressione arimmetica, un termine qualunque è uguale alla somma del primo termine, e del prodotto della differenza comune moltiplicata per lo numero de' termini precedenti. Imperocchè il sesto termine, per esempio, che è $a \pm 5d$, è nella progressione crescente $a + 5d$, cioè la somma del primo, e del prodotto della differenza d per lo numero 5 de' termini, che precedono il sesto. Nella progressione decrescente il sesto termine è anche la somma di a , e di $-5d$ prodotto della differenza $-d$, per 5 numero de' termini, che precedono il sesto.

279. III. In una progressione arimmetica la differenza fra il primo, e l'ultimo termine è uguale al prodotto della differenza comune per lo numero de' termini di tutta la progressione meno uno. Così nella stessa progressione egli è chiaro, che la differenza fra a , ed $a \pm 7d$, è $\pm 7d$.

280. IV. La somma di tutti i termini d'una progressione arimmetica, è uguale alla metà del prodotto della somma degli estremi moltiplicata per lo numero di tutti i termini, o sia, perchè è lo stesso, al prodotto di questa somma per la metà del loro numero, o della metà di questa somma pel loro numero. Così, se si moltiplichino $2a \pm 7d$, somma degli estremi della stessa progressione, per 8, numero de' suoi termini, si avrà $16a \pm 56d$, la cui metà $8a \pm 28d = a + a \pm d + a \pm 2d + a \pm 3d$

$+a \pm 4d + a \pm 5d + a \pm 6d + a \pm 7d$: imperocchè per mezzo della riduzione, quell'ultimo membro diverrà $8a \pm 28d$.

281. SCOLIO. Se il numero de' termini è spari, si può dire, che la somma di tutti i termini è uguale al prodotto del termine di mezzo per lo loro numero, e che il termine di mezzo è precisamente uguale alla metà della somma degli estremi.

282. TEOREMA IV. *Una progressione aritmetica può aver o per uno de' suoi termini.*

DIM. Imperocchè tra o e un numero qualunque, vi è sempre una differenza uguale a questo numero.

283. COROLLARIO. *Si può continuar quanto si vuole una progressione decrescente: per esempio, se si ha la progressione $\div 16. 12. 8. 4. 0$, si potrà continuarla così $\div 16. 12. 8. 4. 0. -4. -8. -12. -16$ ec. La progressione $\div 11. 6. 1$ può esser continuata, ponendo $\div 11. 6. 1. -4. -9. -14. -19$ ec.*

284. SCOLIO. *Da queste proprietà delle progressioni aritmetiche si deducono facilmente le formole, per isciogliere questo problema generale. Date tre di queste cinque cose, cioè, il primo termine $=a$; l'ultimo termine $=\omega$; la differenza comune $=d$; il numero de' termini $=n$; la somma di tutti i termini $=s$, trovare immediatamente una delle altre due. Imperocchè supponendo, che la progressione sia crescente (si può trattar come crescente ogni progression decrescente chiamando il suo primo termine ω , e l' suo ultimo a) 1°. se si esprime algebricamente il terzo corollario, si avrà $\omega - a = dn - d$, e in questa equazione, prendendo successivamente i valori di ω , di a , di d , e di n ,
si*

si avranno quattro formole, * che sono $\omega = dn - d$

$$+ a, a = \omega - dn + d, d = \frac{\omega - a}{n - 1}, n = \frac{\omega - a}{d} + 1^*.$$

2°. Esprimendo algebricamente il quarto corollario si ha $an + \omega n = 2s$, donde si potranno ancora de-

$$\text{durre quattro formole, * cioè } s = \frac{an + \omega n}{2}, n =$$

$$\frac{2s}{a + \omega}, a = \frac{2s}{n} - \omega, \omega = \frac{2s}{n} - a^*. 3^\circ. \text{ Se in quest'}$$

ultima equazione si sostituisce il valore di $\omega = a + dn - d$,

cavato dalla prima, si avrà $2an + dnn - dn = 2s$, onde

$$\text{se ne potran dedurre quattro nuove formole, * cioè } s = \frac{dnn - dn}{2} + \frac{2an}{n}, a = \frac{s}{n} - \frac{dn + d}{2}, d = \frac{2s - 2an}{nn - n}$$

$$n = \sqrt[4]{\frac{2s - a}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} - \frac{a}{d}^*. 4^\circ. \text{ Se nella}$$

stessa equazione $an + \omega n = 2s$, si sostituisca il valo-

re

(a) Per trovare quì il valore di n , si ricorda,

che ciò dipende dall'estrazione della radice del 2°.

grado. L'equazione dunque sarà questa $dnn - dn = 2s$,

$$\text{e lasciando la più alta potenza dell'incognita scevr}$$

da' coefficienti, sarà ridotta $nn - n + \frac{2an}{d} = \frac{2s}{d}$.

Quest'equazione non è un quadrato perfetto; e però

bisogna attendere quanto s'è detto §. 225: e'l quadra-

to della metà del coefficiente del 2°. termine che quì si

deve aggiungere all'uno, e all'altro membro, farà il

$$\text{quadrato di } -\frac{1}{2} + \frac{a}{d}.$$

re di $a = \omega - dn + d$ preso nella prima, si avrà
 $2\omega n - dnn + dn = 2s$, donde se ne potran dedurre
 quattro nuove formole, * che sono, $s = \frac{\omega n - dnn + dn}{2}$, $\omega = \frac{s}{n} + \frac{dn - d}{2}$, $d = \frac{2n - 2s}{nn - n}$, $n =$

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{d^2} + \frac{\omega - 2s}{d} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\omega}{d}}. 5^o. \text{ In fine, se in}$$

$an + \omega n = 2s$, si sostituisca il valore di $n = \frac{1}{2} + \frac{\omega - a}{\omega - a}$

$\frac{d}{d}$, preso nella prima equazione si avranno anche
 quattro formole, cioè * $s = \frac{\omega + a}{2} + \frac{\omega\omega - aa}{2d}$, $d =$

$$\frac{\omega\omega - aa}{2s - a - \omega}, a = \sqrt{\frac{\omega\omega + \omega d - 2sd + \frac{d^2}{4}}{2}} + \frac{d}{2}, \omega =$$

$$\sqrt{aa - ad + 2sd + \frac{d^2}{2}} - \frac{d}{2}. \text{ E queste venti formole}$$

sciogliono tutti i casi possibili del Problema enunciato di sopra.

285. PROBLEMA. Inferire un numero m di
 mezzeproportionali fra due termini dati, in modo
 che ne risulti una progressione aritmetica.

SOLUZIONE. Dividete la differenza di que-
 sti due termini per $m + 1$, il quoziente sarà la
 differenza, che deve regnare nella progressione
 cercata. Così per inferire 4 mezzeproportio-
 nali tra 7 e 13, la differenza che deve regna-
 re

re nella progressione $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$. Si ha dunque $\div$

$\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{4}{5}$
 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Imperocchè inferendo quattro mezze proporzionali tra 7, e 13, ne risulta una progressione, che ha 6 termini, e per conseguenza cinque differenze uguali; la differenza del primo termine 7 all' ultimo 13, contiene evidentemente queste cinque differenze prese insieme: bisogna dunque dividerla per 5 per aver quella, che deve regnare nella progressione.

*Delle Ragioni, Proporzioni, e Progressioni
 Geometriche.*

286. **I** Rapporti Geometrici sono quelli, che si considerano per lo più nelle grandezze, e però per questi termini di Ragione, Proporzione, o Analogia, Progressione, noi intenderemo sempre parlar delle Geometriche.

In appresso sempre supporremo, che il quoziente d'una ragion diretta, risulta dalla divisione del conseguente per l'antecedente.

287. E' segue da ciò, e dalla nozione delle ragioni geometriche, che *una frazione è una ragione geometrica*, il suo numeratore n'è il conseguente, e 'l denominatore l'antecedente.

288. Si chiama ragione di numero a numero, quella il cui esponente è una quantità esprimibile, o commensurabile: e ragione irrazionabile, o ragione

gione sorda; quella il cui quoziente non può essere espresso nè per numeri interi, nè per rotti. Così la

ragione di 7 a 11, e quella di 1 a $\frac{2}{7}$, ec. so-

no ragioni di numero a numero, perchè i loro quo-

zienti sono esattamente $\frac{11}{7}$, $\frac{7}{2}$, ec. Ma la ragio-

ne di 4 a $\sqrt{3}$, quella di $\sqrt{5}$ ad 8. ec. sono ragioni sorde, perchè è impossibile di trovare un numero intero, o rotto, che esprima il valore esatto di

$\frac{\sqrt{3}}{4}$, o di $\frac{8}{\sqrt{5}}$ (187).

4 $\sqrt{5}$

Da questo non segue, che due incommensurabili siano sempre in ragione sorda; perchè l' uno può essere duplo, triplo ec. per rapporto all' altro.

289. Quando l' antecedente contiene esattamente due volte, tre volte ec. il conseguente, si chiama il loro rapporto una ragione dupla, tripla ec., e quando egli è contenuto esattamente due volte, tre volte, ec. nel conseguente, il loro rapporto si chiama una ragione suddupla, suttripla, 'ec. La ragione di 48 a 6 è una ragione ottupla; e la ragione di 4 a 12 è una ragione suttripla.

290. Quando si moltiplicano per ordine i termini di molte ragioni, cioè, gli antecedenti per gli antecedenti, e i conseguenti pe' conseguenti, i prodotti formano una ragione composta di ognuna di queste ragioni: per esempio, le tre ragioni $a: d$, $b: e$, $c: f$, essendo date, la ragione, che ne è composta è $abc: def$, e ciascuna di queste tre ragioni si chiama una del-

delle radici della ragion composta.

291. Una ragion composta di ragioni uguali si chiama una ragion *duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata*, ec. se ella ha due, tre, quattro ec. radici: così, se si compongono le ragioni uguali $2:4$, $6:12$, $3:6$, si avrà una ragion triplicata $36:288$.

292. I. TEOREMA FONDAMENTALE. Ogni ragione geometrica si può esprimere per mezzo di questa formola $a:aq$, o per questa $b:bq$ ec. O pure, il che è lo stesso, il conseguente d'una ragione geometrica è sempre uguale al prodotto dell'antecedente per lo loro quoziente.

DIM. Poichè il quoziente d'una ragione è quel che risulta dalla divisione del conseguente per l'antecedente, egli è chiaro (54) che questo conseguente, che è il dividendo, dev'essere uguale al prodotto del quoziente per l'antecedente, che è il divisore: Dunque in generale ogni rapporto geometrico, il cui antecedente è a , e 'l cui quoziente è q , ha per conseguente aq , e si può esprimere per $a:aq$. Ogni rapporto il cui antecedente è b , e 'l quoziente è q si può esprimere per $b:bq$, ec.

293. Oss. I. Se si fosse supposto, che il quoziente della ragione risultasse sempre dall'antecedente diviso per lo conseguente sarebbe

stato bisogno supporre questo quoziente $= \frac{1}{-}$

(espressione, che può rappresentare ogni sorta di numero, sia intero, sia rotto) affin d'esprimere i rapporti geometrici per mezzo delle stesse formole $a:aq$, e $b:bq$, ec.

294. II. Quando l' antecedente è maggiore del conseguente, il quoziente q è una frazione minore dell' unità, e quando l' antecedente è più piccolo, q è un numero maggiore dell' unità. Per esempio, nella ragione di 4 a 12, $q = 3$, onde l' antecedente essendo $a = 4$, il conseguente è $4 \times 3 = 12$; e nella ragione di

12 a 4, $q = \frac{1}{3}$, onde l' antecedente essendo $a =$

12, il conseguente è $12 \times \frac{1}{3} = 4 = aq$.

295. TEOR. II. Ogni proporzione può ridursi a questa formola $a : aq = b : bq$.

DIM. I quattro termini di due ragioni uguali, o che hanno uno stesso quoziente, formano una proporzione (265); ma due ragioni, che hanno uno stesso quoziente q , possono esser espresse in generale per $a : aq$, e $b : bq$ (292). Dunque questa espressione generale $a : aq = b : bq$ rappresenta una proporzione geometrica qualunque.

296. TEOR. III. Se si moltiplichino, o si dividano i due termini d' una ragione per una stessa quantità, il valore della ragione non si muta. Altrimenti. I prodotti, o i quozienti di due quantità dissuguali fatti per una stessa quantità, sono nella stessa ragione delle quantità dissuguali.

DIM. Una ragione consiste nel suo quoziente; se dunque si moltiplichino la ragione $a : aq$ per una stessa quantità m , la ragione de' prodotti $am : amq$, consiste nel quoziente q , come prima della moltiplicazione, dunque am , amq sono nella stessa ragione di $a : aq$. Si proverà si.

similmente, che $\frac{a}{m} : \frac{aq}{m}$ sono nella stessa ragione di $a : aq$. Dunque $\frac{a}{m} ; \frac{aq}{m} = am : amq = a : aq$ -: —, ec.

SCOLIO. Le ragioni geometriche, e le frazioni essendo una stessa cosa, si vede ora, perchè una frazione non cangia di valore, sia che si moltiplicino, o si dividano i due termini per una stessa quantità (78).

297. COROLL. Segue da ciò, che i tutti sono nella stessa ragione delle loro metà, loro terzi, quarti ec., e reciprocamente, che i valori delle frazioni, che hanno gli stessi denominatori, sono nella stessa ragione delle quantità; delle quali eleno sono frazioni, o pur, il che è lo stesso, sono tra loro come i loro numeratori; così $a : b = \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{a}{n} : \frac{b}{n} = \frac{a}{p} : \frac{b}{p}$ -: -: -: - ec.

298. TEOR. IV. Una ragion duplicata è uguale a quella de' quadrati de' termini d'una di due ragioni qualunque, che ne sono le radici. Una ragione triplicata è la stessa, che quella de' cubi de' termini d'una di tre ragioni qualunque, che ne sono le radici; e così delle altre potenze.

DIM. 1°. Siano le due ragioni uguali $a : aq$, e $b : bq$, la ragion duplicata è $ab : abqq$. Or è evidente che $ab : abqq = aa : aqqq = bb : bbqq$, perchè queste ragioni hanno lo stesso quoziente q .

2°. Siano le tre ragioni uguali $a : aq$; $b : bq$; e $c : cq$, la ragion triplicata è $abc : abcq^3$. Or egli è an-

è ancora chiaro, che $abc:abcq^3 = a^3 : a^3 q^3 = b^3 : b^3 q^3 = c^3 : c^3 q^3$.

Oss. Poichè le ragioni de' quadrati, de' cubi ec. sono ragioni duplicate, triplicate ec.; si sono chiamate *sudduplicate*, *sutriplicate*, quelle delle radici quadrate, cubiche ec.

299. TEOR. V. *Due termini in ragion reciproca con due altri termini, possono esser posti in ragion diretta, senza sconvolgere il loro ordine, purchè si pongano i due termini d'una di queste ragioni in frazione, il cui numeratore sia 1, o anche una quantità qualunque, come m.*

DIM. La ragione di $bq:b$ è inversa riguardando a quella di a ad aq , e per metterle in ragion diretta, bisognerebbe scrivere $b:bq = a:aq$, ovvero $bq:b = aq:a$. Or io dico, che se si mette, per esempio, la ragione di $bq:b$ in frazione, il cui numeratore sia 1, si avrà

$$\frac{1}{bq} : \frac{1}{b} = a : aq ; \text{ imperocchè il quoziente di } \frac{1}{bq} \text{ diviso per } \frac{1}{b}$$

diviso per $\frac{1}{bq}$ è q , come è quello di aq diviso per a .

Si proverebbe similmente, che $aq:b = \frac{1}{a}$:

$$\frac{1}{aq}, \text{ o anche che } \frac{m}{bq} : \frac{m}{b} = a : aq \text{ ec.}$$

Proprietà delle Proporzioni Geometriche.

300. **TEOR. VI.** In ogni proporzione il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' mezzi. Questo è evidente alla sola ispezione della proporzione $a : aq = b : bq$.

301. **COROLL.** Se dunque una proporzione è espressa per termini differenti fra loro, come a, b, c, d , dove si ha $a : b = c : d$, si avrà $ad = bc$.

302. **TEOR. VII.** Si può formare una proporzione dalle radici di due prodotti uguali, facendo gli estremi colle radici dell'uno, e i mezzi colle radici dell'altro.

DIM. Poichè (300) ogni proporzione dà una equazione fra il prodotto degli estremi, e quello de' mezzi, quando si hanno due prodotti uguali, si può riguardare l'uno come il prodotto de' mezzi d'una proporzione, e l'altro come il prodotto degli estremi: si possono dunque prendere le radici d'uno di questi prodotti per farne i mezzi d'una proporzione, e le radici dell'altro per farne gli estremi.

303. **COROLL. I.** Ogni equazione può esser cambiata in proporzione, per esempio, $ad = bc$, diviene $a : b = c : d$. Questa $ad - bd = cg + c$ può esser ridotta ad $a - b : g + 1 = c : d$. Quest'altra $1 - xx = a$ può ridursi ad $1 - x : a = 1 : 1 + x$. Questa in fine $xx - yy = 1$ diverrà $\div x + y : 1 : x - y$ ec.

304. **COROLL. II.** Quattro termini proporzionali, come $a : b = c : d$ possono essere ordinati in sette altre maniere, senza cessare d'essere direttamente proporzionali. Imperocchè a causa de' due prodotti $ad = bc$, che risultano da questa pro-

porzione, si possono situare a , e d negli estremi, e b e c ne' mezzi: ovvero b , e c negli estremi, ed a , e d ne' mezzi in otto maniere differenti, come si vedrà.

$$a:b=c:d. b:a=d:c. c:a=d:b. d:b=c:a. \\ a:c=b:d. b:d=a:c. c:d=a:b. d:c=b:a.$$

E similmente si potranno formarne quante altre proporzioni si vorranno, posto che il prodotto de' loro estremi, e de' loro mezzi si riducano all'equazione primitiva $ad=bc$. Così si può mettere....

$$a+b:b=c+d:d \quad a-b:b=c-d:d \\ a:a+b=c:c+d \quad a:a-b=c:c-d \\ a+b:a-b=c+d:c-d; a-b:a+b=c-d:c+d. \text{ec.}$$

305. OSSERVAZIONE. Di 24 maniere si possono ordinare le quattro lettere della proporzione $a:b=c:d$; otto sono quelle, nelle quali questi termini sono in ragion diretta, come si è veduto; otto, dove sono in ragion inversa, ed otto dove sono nè direttamente, nè reciprocamente proporzionali.

Gli ordini, che danno ragioni inverse sono.

$$\begin{array}{cccc} abdc & bacd & cabd & dbac \\ acdb & bdca & edba & bcad \end{array}$$

Imperocchè, per esempio, se si fa $a:b=$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{il prodotto degli estremi, e de' mezzi darà } ad=bc. \text{ Gli}$$

otto altri ordini sono....

ad

<i>adbc</i>	<i>bcad</i>	<i>cbad</i>	<i>dabc</i>
<i>adcb</i>	<i>bcda</i>	<i>cbda</i>	<i>dacb</i>

Onde si vede, che bisognerebbe far cangiare di sito a un termine in ciascuna ragione, per mettergli in ragion diretta.

306. TEOR. VIII. *In una proporzione, se l'antecedente della prima ragione è più grande, uguale, o più piccolo del suo conseguente, l'antecedente della seconda ragione sarà più grande, uguale, o più piccolo del suo conseguente; e se l'antecedente della prima ragione è maggiore, uguale, o minore dell'antecedente della seconda ragione, il conseguente della prima ragione sarà maggiore, uguale, o minore di quello della seconda ragione.*

DIM. La prima parte di questo Teorema è certa per la natura della Proporzione, e la seconda lo diverrà, perchè l'antecedente della seconda ragione può divenir conseguente della prima, e reciprocamente, senza cangiar la proporzione (304).

307. TEOR. IX. *Se si moltiplichino, o si dividano due, o più proporzioni qualunque, termine per termine, i prodotti, o i quozienti saranno sempre in proporzione.*

DIM. 1°. Se si moltiplichino termine per termine le due proporzioni $a : aq = b : bq$, $c : cp = d : dp$, egli è chiaro, che i prodotti $ac : aq = bd : bdq$ formano una proporzione, a cagion dello stesso quoziente pq .

2°. Se si dividono $a : aq = b : bq$ per $c : cp$

$= d : dp$, egli è chiaro che $\frac{a}{c} : \frac{aq}{cp} = \frac{b}{d} : \frac{bq}{dp}$,
M poi.

poichè i quozienti di ciascuna ragione sono $\frac{p}{q}$.

308. COROLL. *Le stesse potenze di quantità proporzionali sono anche proporzionali, e le loro stesse radici sono anche proporzionali.*

Per esempio, se si ha $a : b = c : d$, i quadrati, i cubi ec. di questi quattro termini saranno questa stessa proporzione moltiplicata termine per termine una volta, due volte ec., e se a, b, c, d , rappresentano quattro potenze dello stesso grado, facendo $a = r^3, b = s^3, c = t^3, d = u^3$, si avrà $r^3 : s^3 = t^3 : u^3$, che non sono altra cosa, che il prodotto della proporzione $r : s = t : u$ moltiplicata due volte termine per termine. Ma r, s, t, u , sono le radici cubiche di r^3, s^3, t^3, u^3 , o de' termini a, b, c, d : dunque le radici cubiche de' termini proporzionali a, b, c, d , sono anche in proporzione. E l'istesso è delle altre radici, le quali non sono altra cosa, che potenze, i cui esponenti sono frazioni (173).

309. TEOR. X. *Se si prende la somma, o la differenza di due, o di più proporzioni termine per termine, in questi soli due casi ne risulterà una proporzione, cioè, 1°. quando il quoziente di queste proporzioni sarà lo stesso; 2°. quando gli antecedenti di queste proporzioni presi nel loro ordine saranno in proporzione, o pure, il che è lo stesso, quando i conseguenti presi nel loro ordine saranno in proporzione.*

DIM. Di due proporzioni $a : aq = b : bq$, e $c : cp = d : dp$, per conchiuderne $a + c : aq + cp = b + d : bq + dp$, bisogna far vedere, che si ha
 efat.

esattamente questa equazione (301) $abq + adp + bcq + cdp = abq + adq + bcp + cdp$, e riducendo, $adp + bcq = adq + bcp$: ma egli è evidente, che questa equazione è giusta, 1°. se $p = q$, imperocchè allora ella può ridursi ad $adp + bcp = adp + bcp$: 2°. se $ad = bc$, imperocchè allora ella può ridursi ad $adp + adq = adq + adp$. Ma si ha (301) $ad = bc$ quando $a : b = c : d$, o quando $aq : bq = cp : dp$, perchè in quest' ultimo caso $adpq = bcpq$, che si riduce (223) ad $ad = bc$. (L'istesso calcolo dovrà farsi per la sottrazione de' termini di due proporzioni).

Dunque, se si prende la somma, o la differenza ec.

310. TEOR. XI. *Se molti termini sono proporzionali, la somma degli antecedenti, è alla somma de' conseguenti, come un' antecedente qualunque è al suo conseguente.*

DIM. Se si ha $a : aq = b : bq = c : cq = d : dq$, io dico, che $a + b + c + d : aq + bq + cq + dq = b : bq$, per esempio: imperocchè il conseguente della prima ragione è la stessa cosa, che $a + b + c + d \times q$: or egli è evidente, che (295) $a + b + c + d : a + b + c + d \times q = b : b \times q$.

Proprietà delle Progressioni Geometriche.

311. TEOR. XII. *Ogni progressione geometrica può ridursi a questa formola $\div a . aq . aq^2 . aq^3 . aq^4 . aq^5 . aq^6 . ec.$*

DIM. Una progressione è una serie di termini, che sono alternativamente antecedenti, e conseguenti nella stessa ragione, o sia che hanno sempre uno stesso quoziente (269). Or

egli è evidente, che una tal serie è rappresentata per $a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 \cdot aq^4 \cdot$ ec., perchè ciascun termine essendo diviso per quello, che lo precede immediatamente sulla sinistra, o che è suo antecedente, ha sempre q per quoziente.

312. SCOLIO. Gli esponenti de' termini successivi di questa formola essendo evidentemente i termini della serie de' numeri naturali, che partono dal termine 0, apparisce, che la formola generale può essere espressa così $\div aq^0 \cdot aq^1 \cdot aq^2 \cdot aq^3 \cdot aq^4 \cdot$ ec. In fatti, se si divide

aq^1 per aq^0 , si avrà $\frac{aq^1}{aq^0} = q^{1-0} = q$ (146).

Onde segue che $aq^0 = a$, e che per conseguenza $q^0 = 1$: dunque in generale la potenza zero d'una quantità qualunque è l'unità.

313. TEOR. XIII. In ogni progressione un termine qualunque è uguale al prodotto del primo per lo quoziente, elevato a una potenza dello stesso ordine del numero de' termini precedenti.

DIM. Ciò è evidente all'ispezione della formola $\div a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 \cdot aq^4 \cdot aq^5 \cdot$ ec., dove si vede, che il quinto termine aq^4 , è uguale al prodotto del primo a per lo quoziente q elevato alla quarta potenza.

Questo Teorema può esprimersi per mezzo della formola $m = aq^{n-1}$, dove m significa un termine qualunque, ed n il numero de' termini.

314. COROLL. Tutte le potenze successive d'una quantità sono in progressione geometrica.

Imperocchè, se si fa $a = 1$, e q uguale a una quantità qualunque, la progressione diverrà $\div 1$.

$q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot q^4 \cdot q^5 \cdot q^6$. ec. dove si vede che le potenze successive di q sono in progressione geometrica .

Non è l'istesso delle radici successive , che sono potenze , i cui esponenti sono frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ec. che non sono in progressione arimmetica .

315. COROLL. II. Le somme, o le differenze fra' termini successivi d'una progression geometrica, sono in progression geometrica. Le somme, o le differenze tra i termini della progressione $\div a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 \cdot aq^4 \cdot aq^5 \cdot aq^6$, sono $a \pm aq \cdot aq \pm aq^2 \cdot aq^2 \pm aq^3 \cdot aq^3 \pm aq^4 \cdot aq^4 \pm aq^5 \cdot aq^5 \pm aq^6$. Or egli è chiaro, che questi termini sono in progression geometrica , perchè ciascuno è il prodotto del primo moltiplicato per lo quoziente elevato a una potenza dell'ordine del numero de' termini precedenti. Così $aq^4 \pm aq^5$, che è il quinto termine è il prodotto di $a \pm aq$ per q^4 .

316. TEOR. XIV. In ogni progressione il prodotto degli estremi , o de' termini ugualmente lontani dagli estremi , sono uguali fra loro , o al quadrato del termine di mezzo , se il numero de' termini è pari .

DIM. Ciò è chiaro all' ispezion della formula $\div a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 \cdot aq^4 \cdot aq^5 \cdot aq^6$. ec. dove il prodotto degli estremi aaq^6 è uguale al prodotto del secondo aq , e del penultimo aq^5 , a quello del terzo aq^2 , e dell' antepenultimo aq^4 , ed al quadrato del mezzo aq^3 .

COROLL. In una proporzione continua il quadrato del mezzo è uguale al prodotto degli estremi. Imperocchè è una progressione di tre termini ,

317. TEOR. XV. In una progressione qua-

lunque $\div a, aq, aq^2, aq^3, \text{ ec.}$ Se $q=1$, ovvero $=\frac{1}{1}$, la differenza fra il primo, e l'ultimo termine è uguale alla somma di tutti i termini eccetto il più grande. Se $q=3$, ovvero $=\frac{1}{3}$, la differenza fra il primo, e l'ultimo termine è uguale al doppio della somma di tutti i termini eccetto il più grande. Se $q=4$ ovvero $=\frac{1}{4}$ la differenza fra il primo, e l'ultimo termine è il triplo della somma di tutti i termini, eccetto il più grande ec.

Imperocchè se $q=2$, la progressione $\div a, aq, aq^2, aq^3, \text{ ec.}$ diverrà $\div a, 2a, 4a, 8a$, nella quale $8a-a$ differenza fra gli estremi è $7a = a+2a+4a$ somma di tutti i termini, che precedono il più grande. Se $q=3$ la progressione diverrà $\div a, 3a, 9a, 27a$, dove $27a-a=26a$ doppia di $a+3a+9a=13a$. L'istesso è se $q=\frac{1}{2}$, ovvero $\frac{1}{2}$ ec.

318. TEOR. XVI. In ogni progressione il primo termine è al terzo, come il quadrato del primo al quadrato del secondo. Il primo è al quarto, come il cubo del primo al cubo del secondo, e così degli altri.

In generale due termini qualunque lontani d' un intervallo qualunque, sono tra loro come due termini qualunque, che si seguono immediatamente, e che sono elevati ad una potenza uguale all'intervallo di questi due primi termini. Per esempio, il terzo termine è al nono, come la sesta potenza d' uno de' termini qualunque è alla sesta potenza del termine seguente.

Dim. In questa progressione $\div a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, \text{ ec.}$ egli è evidente, che $a : aq^2 = a^2 : a^2 q^2$, perchè il quoziente di queste due ragioni è q^2 .

Si-

Similmente $a : aq^3 = a^3 : a^3 q^3$, perchè il quoziente di ciascuna di queste ragioni è q^3 , ec.

Per la stessa ragione si vede, che l'intervallo del terzo termine al nono, essendo 6, $aq^3 : aq^9 =$
 $\frac{1}{6} \quad \frac{1}{6}$

$aq^9 : aq^6$, o sia $aq^3 : aq^9 = a^6 q^9 \cdot 6 : a^6 q^{6 \cdot 6}$, perchè il quoziente di queste due ragioni è q^6 , ec.

In generale aq^m , aq^r rappresentando due termini qualunque, che si vogliono paragonare insieme, il loro intervallo è $r-m$; ed aq^n rappresentando un altro termine qualunque, aq^{n+1} sarà il seguente, e si avrà sempre $aq^m : aq^r = a^{r-m} q^{r-m} : a^{r-m} q^{(n+1)(r-m)}$. Perchè il quoziente di queste due ragioni è q^{r-m} .

319. TEOR. XVII. I termini espressi colle stesse lettere, e cogli esponenti in proporzione, o in progressione aritmetica, sono in proporzione, o in progressione geometrica.

DIM. Imperocchè egli è chiaro, che $aq^5 : aq^9 = aq^3 : aq^6$ perchè il quoto è q^4 . Similmente $\div aq^1 \cdot aq^3 \cdot aq^5 \cdot aq^7 \cdot aq^9$. Perchè il quoziente comune è q^2 .

Differenti Problemi sulle Proporzioni, e Progressioni Geometriche.

320. PROBLEMA I. Trovare uno de' quattro termini d'una proporzione della quale se conoscono tre.

SOLUZIONE. Chiamate x il termine incognito. Mettetelo in proporzione con tre altri, secondo l'ordine, che deve avere; fate un'equa-

zione del prodotto degli estremi , e di quello de' mezzi , nell'un de' quali si troverà x , e del quale facilmente si avrà il valore , dividendo il prodotto, dove x non si trova , per lo termine col quale egli era moltiplicato nell'equazione: donde si cava questa regola generale. *Un termine qualunque d'una proporzione, s'è uno de' mezzi, è uguale o al prodotto degli estremi diviso per l'altro de' mezzi: o s'è estremo, al prodotto de' mezzi diviso per l'altro degli estremi.*

Per esempio, siano dati a, b, c : si cerchi il quarto proporzionale, si ha dunque $a : b =$
 $c : x$. Dunque $ax = bc$, ed $(221) x = \frac{bc}{a}$.

Se si avesse voluto, che x fosse il secondo termine sarebbe stato $a : x = b : c$. Dunque $ac = bx$. Dun-

que $x = \frac{ac}{b}$.

La regola generale contenuta nella soluzione di questo Problema si chiama *la regola del tre*.

321. Oss. I. *Nella Pratica della regola del tre, gli Arimmetici osservano, che bisogna considerare, se i tre termini dati sono in ragion diretta, o in ragion reciproca col termine incognito; il che dallo stato della questione si conosce. Nel primo caso la regola del tre si chiama di più diretta, ed è quando si vede, che il termine, che si cerca dev'essere tanto più grande, o più piccolo del terzo termine dato, quanto il secondo dato è più grande, o più piccolo del primo. Allora bisogna porre x nel quarto termine della proporzione, e servirsi della formula*

$$x = \frac{bc}{a}$$
la

la $x = \frac{bc}{a}$, che si esprime così; La regola del

tre diretta si fa moltiplicando il secondo termine per lo terzo, e dividendo il prodotto per lo primo termine dato, il quoziente è il termine cercato.

322. Si conosce, che il termine incognito è in ragion reciproca co' tre termini dati, quando per lo stato della questione si vede, che il termine cercato dev' essere tanto più grande, o più piccolo del terzo dato, quanto il secondo è più piccolo, o più grande del primo, allora la regola si chiama inversa, e bisogna situare x nel secondo, o nel ter-

zo termine, e servirsi della formola $x = \frac{ac}{b}$, che

s' esprime così: Nella regola del tre inversa moltiplicate il primo termine dato per lo terzo, e dividetene il prodotto per lo secondo termine dato; il quoziente sarà il quarto termine cercato.

ESEMPIO I. 36 Pertiche d' opera hanno costata 60 lire, quanto costeranno 48 pertiche? Egli è evidente, che questa regola di tre è diretta, perchè il prezzo incognito è tanto maggiore di 48 pertiche, quanto il prezzo 60 è maggiore di 36; e però per

la formola $x = \frac{bc}{a}$ si avrà $x = 80$ l.

ESEMPIO II. In un giorno 20 uomini hanno fatto 45 pertiche d' opera. Per farne 81 pertiche quanti uomini vi bisogneranno?

Egli è chiaro, che i tre termini 20, 45, 81 non possono essere in ragion diretta col quarto ter-

mi-

mine incognito; imperocchè il numero d' uomini cercato non deve passare tanto 81, quanto 45 sorpassa 20; al contrario si vede, che vi bisognano meno di 81 uomini per fare 81 pertiche d' opera, come vi son bisognati meno di 45 uomini per farne 45 pertiche. Bisogna dunque scrivere $20: 45 = x: 81$,

ac

e per conseguenza per la formola $x = \frac{ac}{b}$ si avrà

$$x = 36.$$

323. II. La regola del tre è inversa, quando si sono malamente disposti i termini della questione; imperocchè è chiaro, che la precedente dovrebbe esser proposta così. Per fare 45 pertiche d' opera, vi han bisognato 20 uomini; per farne 81, quanti uomini vi bisogneranno?

324. III. Accade qualche volta, che si propongano alcune questioni complicate, le soluzioni delle quali si chiamano Regole di Compagnia, e per le quali non vi è di bisogno di altra regola, che di distinguerle in molte proporzioni, delle quali, se ne troveranno i termini incogniti per la Regola del tre diretta.

ESEMPIO III. 20 uomini in 15 giorni han fatte 160 pertiche, in 12 giorni 30 uomini quante ne faranno?

Questa questione si deve ridurre a queste due. Se 20 han fatte 60 pertiche in un certo tempo, quante ne faranno 30 uomini nello stesso tempo? Risposta, 240.

Se in 15 giorni questi uomini fanno 240 pertiche, in 12 giorni quante ne faranno? Risposta, 192.

Oppure in queste due: Se in 15 giorni si fanno

160 pertiche, in 12 giorni quante se ne faranno?
Risposta, 128.

Se 20 uomini avrebbon fatto 128 pertiche,
 quante ne faranno 30 uomini? *Risposta* 192.(a).

ESEM-

(a) Senz' andar cercando regole per trovare queste proporzioni, basta poca attenzione per isciogliere queste forti di quistioni indipendentemente dalle proporzioni. Poichè in quest' esempio basta cercar dapp- principio, che Lavoro giornale fa un' uomo di-

$$\frac{160}{15}$$
 cendo 160 pertiche in 15 giorni fanno $\frac{160}{15}$ per gior-
 no, la cui ventesima parte (ovvero $\frac{160}{15 \times 20}$) fa-
 rà il lavoro giornale d' un' uomo . Ciò posto, 30
 uomini faranno in un giorno $30 \times \frac{160}{15 \times 20}$, ov-
 vero $\frac{30 \times 160}{15 \times 20}$, e per conseguenza in 12 giorni fa-
 ranno $\frac{12 \times 30 \times 160}{15 \times 20} = 192$ pertiche.

Nella stessa maniera, se si proponesse questa quistione, (cui un' Arimmetico chiamerebbe regola del sette:) 525 Soldati per 4 giorni sono stati alimentati con 10 tomola di grano, ciascun delle quali pesava 240 libbre: Con 17. tomola, ciascuno delle quali pesasse 320 libbre, quanti giorni potrebbero esser alimentati 217 Soldati? Io cerco dappprincipio ciò, che un Soldato consuma in un giorno, dicendo 10 volte 240 libbre consumate in 4 giorni, fanno $\frac{10 \times 240}{4}$ per giorno,

la

ESEMPIO IV. Tre Mercanti han fatto un fondo di 12000 lire. Pietro vi ha messo 2000 lire. Giacomo 4000, e Giovanni 6000; e hanno perduto 2400 lire su questo fondo; si domanda quanta è la perdita di ciascuno?

Questa questione si scioglie per mezzo di tante proporzioni, quanti termini incogniti vi sono, dicendo, il fondo è alla perdita, come quello, che ciascuno ha contribuito, a quello, che ha perduto: di maniera che per mezzo di tre regole del tre si troverà, che Pietro ha perduto 400 lire, Giacomo 800, e Giovanni 1200.

325. IV. Si possono anche sciogliere queste sorti di questioni, per la Regola, che si chiama di falsa posizione. Ella consiste a mettere in luogo de' termini incogniti altri termini supposti ad arbitrio, ma proporzionali a questi incogniti, per poter trovare questi incogniti per mezzo delle regole del tre. Per esempio, si potrebbe proporre la questione pre-

ma
la cui 325. parte; ovvero $\frac{16 \times 240}{4 \times 525}$ è ciò, che consuma ciascun Soldato in un giorno. Ciò posto 17 volte 320 libb. divise tra 217, ovvero $\frac{17 \times 320}{217}$ esprime ciò, che ciascun Soldato ha da consumare; di maniera che dividendo questa quantità per $\frac{10 \times 240}{4 \times 525}$ (che esprime il consumo giornale d' un Soldato.) s' avrà $\frac{17 \times 320 \times 4 \times 525}{10 \times 240 \times 217} = 21 \frac{58}{62}$ per lo numero de' giorni, che si cercano.

cedente in questa maniera. Bisogna spartire 2400 lire sopra un fondo fatto da Pietro, Giacomo, e Giovanni, e nel quale Giovanni avea contribuito quanto i due altri insieme, e Giacomo il doppio di Pietro.

Poichè non conosco le quantità, ma solamente il rapporto delle somme, che ciascun Mercante ha contribuito, le sostituisco le quantità proporzionali; ed avendo supposto, che Pietro abbia posto 10 lire, Giacomo ne avrebbe poste 20, e Giovanni 30, la cui somma è 60 lire. Dico dunque, come 60 lire sono alla perdita 2400 lire, così 10 lire, 20 lire, 30 lire sono a 400 lire, 800 lire, 1200 lire.

Se avessi supposta la data di Pietro di 3 lire, avrei allora fatto, come 18 lire sono a 2400 lire, così 3 lire, 6 lire, 9 lire sono a 400 lire, 800 lire, 1200 lire.

326. PROBLEMA II. Essendo dati il primo termine, e 'l quoziente d'una progressione, trovare un termine qualunque.

Formola $m = aq^{n-1}$ (313), così se si dimanda l'undecimo termine d'una progressione, della quale 1 è il primo termine, e 4 è il quoziente si avrà $a = 1$, $q = 4$, $n = 11$, il termine cercato $= m$, facendo le sostituzioni $m = 1 \times 4^{10} = 4^{10} = 1048576$.

327. PROBLEMA III. Trovar la somma s di tutti i termini d'una progression geometrica, della quale si conosce il primo termine a , l'ultimo ω , ed il quoziente q .

SOLUZIONE. In una progressione tutti i termini sono antecedenti eccetto l'ultimo, e tutti i termini sono conseguenti eccetto il primo. Dunque la somma degli antecedenti è $s - \omega$, e la somma de' conseguenti è $s - a$; ma (310)

$s - \omega$

$s - \omega : s - a = a : aq$. Dunque $saq - a\omega q = s\omega - as$, o (223) $sq - \omega q = s - a$. Dunque $sq - \omega q = a$. Dunque $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$.

328. PROBLEMA IV. Trovar la somma s essendo dati il primo termine a , il numero de' termini n , e'l quoziente q .

$$\text{Formola} \dots s = \frac{aq^n - a}{q - 1}, \text{ o } s = a \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

DIM. L'ultimo termine di questa progressione è aq^{n-1} : si ha dunque, come sopra, $s - aq^{n-1} : s - a = a : aq$. Dunque $saq - aaq^{n-1} = s - aa$: dividendo tutto per a , e mettendo q^n in luogo di qq^{n-1} sia ha $sq - aq^n = s - aa$.

$$\text{Dunque } s = \frac{aq^n - a}{q - 1}.$$

329. PROBLEMA V. Trovare tutti i termini d'una progressione, della quale si conosce il quoziente q , il numero de' termini n , e la somma s .

$$\text{Formola} \dots a = \frac{sq - s}{q^n - 1}, \text{ ovvero } a = s \frac{q - 1}{q^n - 1}.$$

Questa formola cavata dall'equazione precedente dà il primo termine; e moltiplicandolo per le potenze successive del quoziente, si avranno tutti gli altri,

$$\text{che saranno per conseguenza } s \frac{q^2 - q}{q^n - 1}, s \frac{q^3 - q^2}{q^n - 1}, \dots, s \frac{q^4 - q^3}{q^n - 1}, s \frac{q^5 - q^4}{q^n - 1} \text{ ec. e pure } s \frac{q - 1}{q^n - 1}.$$

$$s \frac{q-1}{1}, s \frac{q-1}{1}, s \frac{q-1}{1} \text{ ec.}$$

$$q^{n-2} - \frac{1}{q^2} \quad q^{n-3} - \frac{1}{q^3} \quad q^{n-4} - \frac{1}{q^4}$$

330. PROBLEMA VI. Trovare il quoziente q d'una progressione, della quale si conosce il primo termine a , l'ultimo ω , e il numero n .

Formola $q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$. Imperocchè $(313)\omega = aq^{n-1}$.

331. PROBLEMA VII. Trovare il numero n de' termini d'una progressione della quale si conosce il primo termine a , l'ultimo ω , e'l quoziente q .

SOLUZIONE. L'equazione $\frac{\omega}{a} = q^{n-1}$ (323) es-

sendo moltiplicata per q diviene $\frac{\omega q}{a} = q^n$. Il che fa

vedere, che, avendo diviso pel primo termine il prodotto dell'ultimo per lo quoziente, si ha una potenza di questo quoziente, il cui esponente è uguale al numero de' termini, che si cerca: e che così elevando il quoziente a tutte le sue potenze successive, si troverà facilmente il numero de' termini. Sia per esempio $a=5$, $q=3$, $\omega=3645$, moltiplico 3645 per 3, e ne divido il prodotto 10935 per 5, trovo 2187. Elevo il quoziente 3 a tutte le sue potenze successive, finchè ne incontri una uguale a 2187, fo 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, e veggio, che 2187 è la settima potenza di 3, dun-

dunque il numero de' termini cercato è 7.

In effetto $\div$, 5. 15. 45. 135. 405. 1215. 3645.

Si sarebbe facilmente trovato quest' esponente dividendo il logaritmo di 2187 per quello di 3.

332. PROBLEMA VIII. Inserire mezzze proporzionali fra due termini dati.

1°. Bisogni inferir un mezzo proporzionale fra a , e b si avrà dunque $\div$ $a \cdot x \cdot b$, dunque (316) $ab = xx$ dunque (225) $x = \sqrt{ab}$.

2°. Tra a e b bisogni inferire due mezzze proporzionali, si avrà dunque $\div$ $a \cdot x \cdot y \cdot b$, dunque (318) $a : b = a^3 : x^3$. dunque $a^3 b = ax^3$, e

dividendo (223), $aab = x^3$, dunque $x = \sqrt[3]{aab}$. Or avendo il primo, e'l secondo termine sarà facile di trovare il terzo. Imperocchè si avrà

$a : \sqrt[3]{aab} = y : b$, ed elevando tutto al cubo $a^3 b^3$
 $a^3 : aab = y^3 : b^3$. dunque $y^3 = \frac{a^3 b^3}{aab}$ dun-

que $y = \sqrt[3]{abb}$.

3°. In generale tra a , e b bisogni inferire un numero n di mezzze proporzionali; l' intervallo de' termini a , e b sarà $n+1$, si avrà dunque (318) $a^{n+1} b$

$a^{n+1} : x^{n+1} = a : b$, dunque $x^{n+1} = \frac{a^{n+1} b}{a}$, e riducendo, $x^{n+1} = a^n b$, ed estraendone la radice, $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$, ovvero $x = \frac{a^n}{a^{n+1}} \frac{b}{b^{n+1}}$. E questo è il valore

del primo de' mezzzi proporzionali cercati. Per un calcolo simile al precedente si troverà, che il secondo

do mezzo è $\sqrt[n+1]{a^{n-1} b^2}$, il terzo $\sqrt[n+1]{a^{n-2} b^3}$, il quarto $\sqrt[n+1]{a^{n-3} b^4}$ (a). E così in appresso, finchè l'espo-

N nen-

(a) Quando tra a , e b si vogliono inferire 3 mezze proporzionali, u , x , y , sarà da quel che s'è detto di sopra $u = \sqrt[n+1]{a^n b}$; $x = \sqrt[n+1]{a^{n-1} b^2}$; e $y = \sqrt[n+1]{a^{n-2} b^3}$: come apparirà chiaro dalla dimostrazione, che segue.

1°. Poichè a , u , x , y , b si suppongono esser in progressione geometrica, s'avrà $a : b :: a^4 : u^4$ (318); dunque $a u^4 = a^4 b$; dunque $u^4 = a^3 b$; ed estraendo la radice, sarà $u = \sqrt[4]{a^3 b}$. E sostituendo $n=3$, sarà finalmente $u = \sqrt[n+1]{a^n b}$.

2°. Poichè a , $\sqrt[4]{a^3 b}$ ($=u$), e x sono tre termini in progressione geometrica, sarà $\div a : \sqrt[4]{a^3 b} : x$; e però (togliendo i radicali) sarà $a^4 : a^3 b :: a^3 b : x^4$. Dunque $a^4 x^4 = a^6 b^2$; e $x^4 = \frac{a^6 b^2}{a^4} = a^2 b^2$. Onde $x = \sqrt[n+1]{a^{n-1} b^2}$; e sostituendo come sopra, $x = \sqrt[n+1]{a^{n-1} b^2}$.

3°. Poichè finalmente a , $\sqrt[4]{a^3 b}$ ($=u$), $\sqrt[4]{a^3 b}$ ($=x$) e y sono quattro termini proporzionali geometrici, sarà (togliendo i radicali) $a^4 : a^3 b :: a^3 b : y^4$. Dunque $a^4 y^4 = a^5 b^3$; e per conseguenza $y^4 = \frac{a^5 b^3}{a^4} = a b^3$. Dunque $y = \sqrt[n+1]{a b^3}$; e sostituendo come sopra, sarà finalmente $y = \sqrt[n+1]{a^{n-2} b^3}$.

nente di b sia divenuto $= n+1$; nel qual caso, quello di a sarà $= 0$, e il termine $\sqrt[n+1]{a^0 b^{n+1}}$ si ridurrà a b .

333. PROBLEMA IX. Inferire un numero m di mezze proporzionali tra ciascuno de' termini d'una progression geometrica, come $\div aq^0 \cdot aq^1 \cdot aq^2 \cdot aq^3 \cdot \text{ec.}$

Soluzione. Inferite (285) un numero m di mezze proporzionali arimmetiche tra gli esponenti successivi de' termini della Progressione data; e voi avrete gli esponenti della progressione cercata (319). Per esempio, se si vogliono inferir 3 termini tra ciascuno di quelli della progressione precedente si avrà $\div aq^0 \cdot aq^{\frac{1}{4}} \cdot aq^{\frac{1}{2}} \cdot aq^{\frac{3}{4}} \cdot aq^1 \cdot aq^{\frac{5}{4}} \cdot aq^{\frac{3}{2}} \cdot aq^{\frac{7}{4}} \cdot aq^2 \cdot aq^{\frac{9}{4}} \cdot aq^{\frac{5}{2}} \cdot aq^{\frac{11}{4}} \cdot aq^3 \cdot \text{ec.}$

DE' LOGARITMI

Della loro natura, e uso.

334. I Logaritmi sono numeri artificiali, che si sostituiscono a' numeri ordinarij per cangiare tutte le specie di moltiplicazioni in addizioni, e tutte le specie di divisioni in sottrazioni.

Ogni progression geometrica è rappresentata per la formola $\div aq^0 \cdot aq^1 \cdot aq^2 \cdot aq^3 \cdot aq^4 \cdot aq^5 \cdot aq^6 \cdot \text{ec.}$ Nella quale a , e q possono esprimere un numero qualunque. Se dunque si fa $a = 1$ si avrà $\div q^0 \cdot q^1 \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot q^4 \cdot q^5 \cdot q^6 \cdot \text{ec.}$
Onde segue.

335. 1^o. Che il prodotto di due de' termini di questa progressione ha per esponente la somma de' loro esponenti (142), così il prodotto di $q^3 \times q^4 = q^7$. Se dunque si vuol sapere qual è il termine di questa progressione, che è uguale al prodotto di due altri, bisogna cercare qual è quello che ha per esponente la somma de' loro esponenti.

336. 11^o. Che il quoziente di due di questi termini è un termine, che ha per esponente la differenza degli esponenti di questi due termini. Così il quoziente di q^8 diviso per q^3 è q^5 , o q^{8-3} . Dunque per conoscere qual' è il termine uguale al quoziente di due altri, bisogna cercare qual' è quello, il cui esponente è uguale alla differenza degli esponenti di questi due termini.

337. Il Logaritmo d' un numero è l' esponente della potenza di 10, che si trova uguale a questo numero. Così avendo la progressione geometrica $\div 10^0 \cdot 10^1 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^5 \cdot 10^6$ ec. e mettendo i valori di questi termini $\div 1 \cdot 10 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot 10000 \cdot 100000 \cdot 1000000$ ec. L' esponente 0 è il logaritmo di 1, l' esponente 1 è il logaritmo di 10, l' esponente 2 è il logaritmo di 100, l' esponente 3 è il logaritmo di 1000 ec. Ma perchè questi esponenti danno solo i logaritmi de' numeri interi in progressione decupla 1, 10, 100, 1000. ec. e poichè è necessario d' avere i logaritmi de' numeri intermedj, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, ec. si sono aggiunti sette decimali a ciascuno di questi esponenti, che ha cangiata la forma della progressione in questa...

$\div 10^0,000000, 10^1,000000, 10^2,000000, 10^3,000000$ ec.

Or (319) posto che questi esponenti sono in progressione arimmetica, i valori di 10 elevato alle potenze, che da quelli si dinotano, saranno numeri in progression geometrica, e questi stessi esponenti saranno i logaritmi di questi numeri. Dunque facendo crescere questi decimali successivamente di $\frac{1}{1000000000}$, o sia, il che si riduce allo stesso, inserendo 9999999 mezze proporzionali arimmetiche fra ciascuno degli esponenti della prima progressione (285), si ha una nuova progressione geometrica, che comincia così...

$\div 10^{0,00000000}, 10^{0,00000001}, 10^{0,00000002}, 10^{0,00000003}$ ec.
E i valori di questi termini sono numeri, che vanno crescendo molto lentamente dopo l'unità; poichè il primo termine vale 1, e 'l dieci—milion—unesimo val 10. Vi farà dunque fra questi termini intermedj uno che varrà 2, un' altro, che varrà 3, un' altro 4 ec. Così si è trovato, che 2 era il valore del termine $10^{0,3010300}$, che 3 era uguale a $10^{0,4771213}$, $4 = 10^{0,6020600}$ ec. questi esponenti sono dunque i logaritmi di 2, di 3, di 4 ec.

338. Per mezzo di calcoli fondati su questa idea (a), si sono costrutte le tavole de' logaritmi di tutti i numeri dopo 1 fino a 100000, e che servono a trovare quelle de' numeri più grandi. Vi sono alcune di queste tavole nelle quali

(a) E' vero, che i calcoli onde si sono costrutte le Tavole de' Logaritmi, sono fondate su quest' idea; però per farle non bastano nè l'idea data, nè i principj elementari esposti, perchè detti calcoli si sono resi praticabili per mezzo d' alcune regole cavate da' principj, che non sono puramente Elementari, ma più sublimi.

quali per una maggior precisione, i logaritmi hanno 10, ed anche 15 decimali, le comuni ne hanno solamente 7, ed anche non si fa uso, che de' primi 5 decimali. Le tavole ordinarie cominciano così...

Numeri	Logaritmi.
1.	0,0000000.
2.	0,3010300.
3.	0,4771213.
4.	0,6020600.
5.	0,6989700. ec.

339. Onde si vede 1°. Che i logaritmi di tutti i numeri compresi fra 1, e 10 devono cominciar da 0: che quelli di tutti i numeri compresi fra 10, e 100 cominciano da 1: che quelli de' numeri compresi fra 100, e 1000 cominciano da 2, ec. Questa prima cifra (che è l'intero dell'esponente) si chiama *la caratteristica* del logaritmo, perchè serve a far conoscere di quanti caratteri è composto il numero, che risponde a un logaritmo dato. Imperocchè egli è evidente, che deve aver una unità di più di quelle, che son contenute nella caratteristica. Così io veggio a prima vista, che il logaritmo 4,8145605 appartiene a un numero di 5 cifre, perchè la sua caratteristica è 4.

340. 2°. Che il prodotto (335) di due numeri risponde alla somma de' loro logaritmi, e che il loro quoziente (336) alla differenza de' loro logaritmi. Così per moltiplicare 48 per 166 aggiungo i loro logaritmi, che sono 1,6812412, e 2,2201081, la somma è 3,

N 3 9013493,

9013493, che è un logaritmo, che risponde nelle tavole al numero 7968, che è il prodotto di 48×166 . Per dividere 7336 per 56, bisogna togliere il logaritmo di 56, ch'è 1, 7481880 dal logaritmo di 7336, ch'è 3, 8654593, e la differenza 2, 1172713 è un logaritmo, che risponde nella tavola a 131. Dunque 131 è il quoziente di 7336 diviso per 56.

341. 3°. Dunque per fare una regola di tre per mezzo de' logaritmi, bisogna aggiungere insieme i logaritmi del II°, e III° termine, e dalla somma togliere il logaritmo del I° termine, il resto sarà il logaritmo del IV° termine cercato. Per esempio, siano dati $2843 : 8529 = 3147 : x$. Bisognerebbe (320) per aver il valore di x , moltiplicare 3147 per 8529, e dividere il prodotto 26840763 per 2843, il quoziente sarebbe $9441 = x$; questa operazione è lunga, e soggetta ad errori, ma per mezzo de' logaritmi, bisogna aggiungere insieme i logaritmi di 8529, e di 3147, che sono 3, 93090, e 3, 49790, e dalla somma 7, 42880 togliere 3, 45378 logaritmo di 2843, il resto 3, 97502 è il logaritmo di x , il quale risponde nelle tavole a 9441.

342. 4°. Che per elevare una quantità ad una potenza qualunque, bisogna aggiungerne il logaritmo a se stesso quante volte si sarebbe moltiplicata questa quantità; cioè a dire, che bisogna moltiplicare il suo logaritmo per l'esponente della potenza. Così per elevare 8 alla quarta potenza, bisogna moltiplicare il suo logaritmo 0, 90309 per 4, ed il prodotto 3, 61236 è il logaritmo di 4096 quarta potenza di 8.

343. Che in fine, se si divide il logaritmo d'una quantità data per l'esponente della radice, che si vuol estrarre, il quoziente sarà il logaritmo di questa radice; così per estrarre la radice cubica di 6859, dividete il suo logaritmo 3, 83626 per 3, e 'l quoziente 1, 27875 sarà il logaritmo di 19, ch'è la radice cercata.

Sull'uso delle tavole de' Logaritmi, principalmente nelle Operazioni delle frazioni.

344. **L**E tavole de' logaritmi sono sempre accompagnate da un discorso, che ne insegna gli usi, e perciò non entreremo in un lungo dettaglio sopra di ciò. Noi insisteremo soltanto sull'operazioni delle frazioni pe' loro logaritmi. Il metodo ne è estremamente comodo, ed utile; ma comunemente non si trova ben spiegato secondo la maniera, colla quale se ne fa uso al presente.

Bisogna prima sapere, che, essendo dato il logaritmo d'un numero, che non è intero, per avere questo numero con una frazione decimale, bisogna supporre, che la caratteristica di questo logaritmo sia aumentata di tante unità, quanti decimali si vogliono avere; ed avendo trovato il valore del numero intero, che risponde a questo nuovo logaritmo, ne bisogna separar sulla destra tante cifre, quante unità si sono aggiunte alla caratteristica. Così per aver il valore del logaritmo 1, 7413364, * se voglio aver due decimali *, lo cerco nelle tavole come se fosse 3, 7413364; trovo 5512, il suo valore è dunque 55, 12. Se l'avessi cercato colla caratteristica 5, avrei avuto 55, 1235. La ra-

gione è facile a trovarsi. Un logaritmo (339), la cui caratteristica è aumentata d'una, di due, di tre ec. unità diviene quello d' un numero moltiplicato per 10, 100, 1000 ec. Dunque, avendo trovato il vero valore del prodotto, se si divide per 10, 100, 1000 ec. (cioè, se si toglie (72) una, due, tre ec. delle sue ultime cifre) si ha il vero valore del numero cercato co' suoi decimali.

Per la stessa ragione egli è chiaro, che per trovare il logaritmo d' un numero congiunto con una frazione decimale, bisogna cercare il logaritmo di questo numero, come se egli non avesse nessuna delle sue cifre separate per la virgola, e poi togliere dalla caratteristica del numero trovato tante unità, quanti decimali vi sono.

345. Ciò posto, poichè le frazioni propriamente dette sono quantità minori dell' unità (76), e che (337) il logaritmo dell' unità è 0, i logaritmi delle frazioni non sono che numeri difettivi, o negativi, e la loro caratteristica dev' esser preceduta dal segno —; ma si può operare sopra loro, come se fossero positivi, supponendo che il logaritmo dell' unità è 10, 100, o 1000 ec. ed una di queste supposizioni essendo una volta fatta, tutti i logaritmi, che risulteranno da una operazione fatta sulle frazioni, risponderanno a frazioni decimali, le cui cifre saran precedute da tanti 0 meno uno, quante ne bisogneranno, acciocchè la loro caratteristica sia uguale a 10, 100, o 1000 ec. Vedete la tavola seguente.

Numeri naturali. Logaritmi delle tavole.

10000 - - - - -	+	4, 0000000 - - - -
1000 - - - - -	+	3, 0000000 - - - -
100 - - - - -	+	2, 0000000 - - - -
10 - - - - -	+	1, 0000000 - - - -
1 - - - - -	+	0, 0000000 - - - -
0 . 1 - - - - -	—	1, 0000000 - - - -
0 . 01 - - - - -	—	2, 0000000 - - - -
0 . 001 - - - - -	—	3, 0000000 - - - -
0 . 0001 - - - - -	—	4, 0000000 - - - -

Logaritmi supposti.

14, 0000000 - - - -	104, 0000000 - - - -
13, 0000000 - - - -	103, 0000000 - - - -
12, 0000000 - - - -	102, 0000000 - - - -
11, 0000000 - - - -	101, 0000000 - - - -
10, 0000000 - - - -	100, 0000000 - - - -
9, 0000000 - - - -	99, 0000000 - - - -
8, 0000000 - - - -	98, 0000000 - - - -
7, 0000000 - - - -	97, 0000000 - - - -
6, 0000000 - - - -	96, 0000000 - - - -

Noi supporremo quì, che la caratteristica dell'unità è 10, il che basta ordinariamente pe' calcoli, ne' quali non si ha da trattare di frazioni estremamente piccole, come per esempio di quelle, che sono più piccole d'una cento-milionesima, e che non si vogliono trascurare; imperocchè quando si desse questo caso bisognerebbe supporre la caratteristica dell'unità = 100; ma le regole, che seguono sarebbero assolutamente le stesse, mettendo sempre 100 in luogo di 10. Così tutte le volte, che dopo una operazione la caratteristica del logaritmo sorpassa 10, questo logaritmo sarà quello d'un numero

mero intero, composto di tante cifre più uno, quante unità avrà questa caratteristica al di sopra di 10; e tutte le volte, che la caratteristica sarà al di sotto di 10, ella apparterrà al logaritmo d'una frazione decimale preceduta da tanti zeri meno uno, quanto la caratteristica sarà al di sotto di 10.

346. I. Tutte le volte, che un logaritmo dev'esser tolto da uno minore di lui, come, se si dovesse dividere 4 per 7, bisogna aggiungere 10 alla caratteristica del logaritmo del dividendo 4, si avrà 10, 60206, e toglierne il logaritmo del divisore 7 tale qual'è nelle tavole, 0, 84510; restano 9, 75696 per lo logaritmo del quoziente. E così si trovano i logaritmi delle frazioni ordinarie.

347. II. Per aver de' decimali del valore d'un logaritmo d'una frazione qualunque, bisogna cercare questo logaritmo nelle tavole colla caratteristica, che si vorrà, come 3, 4, 5 ec. secondo il numero de' decimali, che si vorranno avere, e mettere davanti a' numeri trovati tanti zeri, quanto la caratteristica del logaritmo è al di sotto di 9. Per esempio, per aver il valore del logaritmo 5,41867, che so essere quello d'una frazione, lo cerco come se la caratteristica fosse 3, e l'ho questo logaritmi fosse 3, 41867, e trovo il suo valore 2622; dunque poichè la caratteristica 5 è di 4 più piccola che 9, io dico che il valore di 5,41867 è 0,0000002622: si troverà anche, che il valore di 9, 45924 è 0,0000002879: che quello di 3, 48365, è 0,00000030455, ec.

348. III. Per moltiplicare una frazione per un'altra bisogna aggiungere i loro logaritmi (trovati n° . 347), e dalla caratteristica della somma togliere 10, il residuo sarà il logaritmo del prodotto.

Per

Per moltiplicare $\frac{7}{12}$ per $\frac{147}{81210}$ bisogna aggiungere i loro logaritmi 9, 76592, e 7, 25760, e dalla caratteristica della somma 17, 02352 avendo tolto 10, il residuo 7, 02352 è il logaritmo di 0, 0010556 prodotto di queste due frazioni. Per moltiplicare 0, 0047 per 0, 000051, bisogna sommare i logaritmi 7, 67210, e 5, 70757, e il logaritmo del prodotto sarà 3, 37967, il valore del quale è 0, 000002397.

La ragione, perchè bisogna togliere 10 è, perchè (44) l'unità è al moltiplicatore, come il moltiplicando al prodotto; dunque per aver il prodotto di due frazioni come $\frac{7}{12}$ e $\frac{147}{81210}$ bisogna far questa proporzione $1 : \frac{7}{12} = \frac{147}{81210} : \frac{7}{12} \times \frac{147}{81210}$; e così per aver il quarto termine, bisogna (341) sommare i logaritmi de' mezzi, e toglierne il logaritmo dell'unità.

349. IV. Per dividere una frazione per un'altra, bisogna aggiungere 10 alla caratteristica del dividendo, e toglierne il logaritmo del divisore, il residuo sarà il logaritmo del quoziente. Per la ragione, che (43) il divisore è all'unità, come il dividendo al quoziente, così per dividere $\frac{7}{12}$ per $\frac{147}{81210}$, bisogna togliere il logaritmo 7, 25760 dal logaritmo 19, 76592, il residuo 12, 50832 fa vedere, che il quoziente è il numero intero 322, o più esattamente 322, 35.

350. V. Per elevare una frazione a una potenza qualunque m , bisogna moltiplicare il suo logaritmo per l'esponente m di questa potenza, e dalla caratteristica del prodotto, togliere il prodotto di $10 \times m - 1$. Per esempio, per elevare 0, 17 alla quinta potenza, bisogna moltiplicarne il logaritmo 9, 2304489 per 5, e dalla caratteristica

del

del prodotto 46, 1522445 togliere $10X5-1=40$; il residuo 6, 1522445 è il logarismo di 0, 0001419857 quinta potenza di 0, 17.

351. VI. Infine per estrarre una radice qualunque da una frazione, bisogna aggiungere alla caratteristica del logarismo di questa frazione il prodotto di 10 per l'esponente della radice meno uno, e dividere la somma per questo esponente intero. Per esempio, per estrarre la radice undecima da 0, 17 bisogna aggiungere alla caratteristica del suo logarismo 9, 2304489, il prodotto 100 di $10X11-1$, e dividere la somma 109, 2304489 per 11, il quoziente 9, 9304044 sarà il logarismo di 0, 85193 radice undecima di 0, 17. Per estrarre la radice quinta da $\frac{1}{12}$, aggiungo 40 prodotto di $10X5-1$ alla caratteristica del logarismo di $\frac{1}{12}$, che è 9, 76592, e divido per 5 la somma 49, 76592, il quoziente 9, 95318 è il logarismo di 0, 8978 radice quinta di $\frac{1}{12}$.

352. Per concepir queste regole, bisogna osservare, che elevare una quantità a tutte le sue potenze successive è far successivamente queste regole di proporzioni, $1 : a = a : a^2$, poi $1 : a = a^2 : a^3$, indi $1 : a = a^3 : a^4$ ec. Sia dunque $a = 0, 17$, il cui logarismo è 9, 23045 : Si trova il logarismo di a^2 facendo 9, 23045 + 9, 23045 = 10, 00000 = 8, 64090; quello di a^3 facendo 9, 23045 + 8, 64090 = 10, 00000 = 7, 69135; quello di a^4 facendo 9, 23045 + 7, 69135 = 10, 00000 = 6, 92180, ec. onde si vede che bisogna togliere il logarismo dell'unità tante volte, quanti gradi meno uno vi saranno alla potenza. Si vede anche, che questa regola ha luogo per trovare i logaritmi delle potenze de' numeri interi, quando
non

non si è fatto il logaritmo dell' unità uguale a zero.

Si può anche applicare questo raziocinio a' logaritmi delle radici.

Delle Proprietà della grandezza considerata nell' infinito.

353. I. **P**ROP. La grandezza è divisibile fino all' infinito.

Dim. La grandezza è per sua essenza suscettibile di più, o di meno: dunque ella non perde niente della sua essenza in ricevendo questo più, e questo meno, e però è ancora grandezza dopo averlo ricevuto, ond' è anche suscettibile di più, o di meno: il perchè ella ne è sempre suscettibile, vale a dire lo è senza fine, o fino all' infinito. Per esempio, la serie naturale de' numeri, 1, 2, 3, 4, ec. cresce evidentemente all' infinito; imperocchè a qualunque gran numero, si concepisca elevato un termine di questa serie, non si vede per tanto che s' sia arrivato presso al fine, il che può solo convenire ad una serie, nella quale il numero de' termini fosse finito.

Intanto comechè non si possano esprimere per numeri i termini infiniti di questa progressione, essendo grandezze infinite, non lasciano d' aver proprietà finite, il perchè si possono sottomettere al calcolo, significandole per un carattere, come ∞ . Così posso rappresentare tutta la serie de' numeri per 1, 2, 3, 4, 5 ... ∞ .

Similmente una quantità finita può esser divisa in parti sempre più piccole, finchè si ven-

ga

ga ad una parte infinitamente piccola ; onde si può rappresentare l'unità divisa in parti per mezzo di questa serie $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots \frac{1}{\infty}$.

354. II. PROP. Una quantità divenuta infinita non può ricevere aumento, nè diminuzione, che per altre quantità infinite.

DIM. Una quantità finita divenuta infinita ha presi tutti gli accrescimenti finiti possibili, e per conseguenza non può essere più aumentata per alcuna quantità finita. Similmente una quantità finita divenuta infinitamente piccola è arrivata al suo ultimo termine finito di diminuzione, e per conseguenza non può essere più diminuita per alcuna quantità finita. Ma una quantità divenuta infinitamente grande, o infinitamente piccola è ancora quantità, e per conseguenza è ancora suscettibile d'aumento, o di diminuzione, bisogna dunque, che questo aumento, o diminuzione si faccia per altre quantità infinite. Così $\infty \pm 1 = \infty$, $1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$, ma $\infty \pm \infty = 2\infty$, e $\frac{1}{\infty} \times 3\infty = \frac{3}{\infty} = 3$, $\frac{2}{\infty}$ divise per $\frac{1}{\infty} = \frac{2}{1}$, ec.

355. COROLL. I. Una quantità finita congiunta, o separata da una quantità infinitamente grande si può trascurare nel calcolo, ed essere supposta $= 0$; così $\infty \pm a = \infty$: l'istesso è d'una quantità infinitamente piccola per rapporto ad una quantità finita, onde $a \pm \frac{1}{\infty} = a$.

356. II. Vi è una infinità di specie di grandezze infinite; poichè per esempio, si può concepire questa progressione arimmetica $\div 1\infty. 2\infty. 3\infty \dots \infty\infty$, della quale l'ultimo termine $\infty\infty$, o sia ∞^2 è infinitamente più grande, che

che il primo. Ma $\infty^2 + \infty^2 = 2\infty^2$, e per conseguenza si può concepire quest' altra progressione $\div 1\infty^2 \cdot 2\infty^2 \cdot 3\infty^2 \dots \infty \infty^2$, o

sia ∞^3 , e in generale si può concepire ∞^∞ , ∞^∞^∞ all' infinito.

L' istessa cosa è riguardo alla grandezza infinitamente piccola; imperocchè si può conce-

pire $\frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{2\infty} \cdot \frac{1}{3\infty} \dots \frac{1}{\infty \infty}$; o sia $\frac{1}{\infty^2}$; della

quale l' ultimo termine è infinitamente più piccolo, che il primo. Si concepisce similmente

$\frac{1}{\infty^2} \cdot \frac{1}{2\infty^2} \cdot \frac{1}{3\infty^2} \dots \frac{1}{\infty \infty^2}$, o sia $\frac{1}{\infty^3}$ ec. in ge-

nerale si può concepire $\frac{1}{\infty^\infty}$, ed $\frac{1}{\infty^\infty^\infty}$ all' infinito ec.

357. Gli esponenti delle quantità infinite servono a notare i loro ordini d' infinito, per esempio, ∞ , 3∞ , che hanno 1 per esponente, o che equivalgono a ∞^1 , $3\infty^1$ sono grandezze infinitamente grandi del primo ordine. $3\infty^4$, $ab\infty^4$ sono grandezze infinitamente grandi

del quarto ordine, $\frac{4}{\infty}$, $\frac{a}{3\infty}$ sono infinita-

mente piccoli del primo ordine, $\frac{1}{a\infty^2}$ è un infinitamente piccolo del second' ordine ec.

358. Notate, che l' espressioni degl' infinita-

ta-

tamente piccoli sono quelle dove il carattere dell'infinito si trova nel denominatore della frazione, il cui numeratore è un finito, o un infinito d' un ordine inferiore. E che tutte l'espressioni, nelle quali il carattere dell'infinito non è nel denominatore, sono espressioni di quantità infinitamente grandi.

359. III. Gli ordini successivi degl' infiniti sono in progressione geometrica, imperocchè gli esponenti, che li disegnano sono i termini della serie naturale de' numeri. Così: ∞^4 , ∞^3 , ∞^2 , ∞^1 , ∞^0 , ∞^{-1} , ∞^{-2} , ∞^{-3} ec. è la stessa

cosa, che ∞^4 , ∞^3 , ∞^2 , ∞ , 1 , $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$ ec.

360. IV. Un infinito d' un ordine qualunque non può essere aumentato, o diminuito per l'addizione, o per la sottrazione d' un numero finito d' infiniti d' un'ordine inferiore; cioè, che uno, o due infiniti d' un'ordine inferiore sono = 0 riguardo a un infinito d' un'ordine superiore, così ∞^2

$\pm a \infty = \infty^2$. Similmente $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}$.

361. V. Un' infinito moltiplicato, o diviso per un' altro infinito, ha per prodotto, o per quoziente una grandezza d' un'ordine notato dall'esponente del prodotto, o del quoziente.

Così $\infty \times \infty = \infty^2$, $3\infty \times b\infty = 3b\infty^2$, cioè a dire un infinitamente grande del primo ordine, moltiplicato per un altro infinitamente grande del primo ordine ha per prodotto un' infinitamente grande del second'ordine.

$\infty^2 \times \infty^3 = \infty^5$, $3\infty^4 \times 4\infty^5 = 12\infty^9$, dunque

que il prodotto di due infinitamente grandi ,
è un infinitamente grande d' un ordine uguale
alla somma degli esponenti.

$\infty \times a = a\infty$, dunque un infinitamente gran-
de moltiplicato per un finito, dà un infinita-
mente grande dello stess' ordine.

$\infty \times \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1$, dunque il prodotto d' un
infinitamente grande per un' infinitamente pic-
colo dello stess' ordine è finito.

$$\frac{1}{\infty} \times a = \frac{a}{\infty}; \frac{1}{4\infty} \times 2b = \frac{b}{2\infty}; \text{dunque}$$

il prodotto d' un' infinitamente piccolo per un fi-
nito, è un' infinitamente piccolo dello stess' ordine .

Nella divisione $\frac{\infty}{\infty} = 1$, $\frac{\infty}{b\infty} = \frac{1}{b}$. Dun-

que il quoziente d' una quantità infinitamente
grande divisa per una quantità infinitamente
grande dello stess' ordine è finito .

$\frac{\infty}{\infty} = \infty$. Dunque il quoziente d' un' infi-
nitamente grande per un' infinitamente grande d' un'
ordine inferiore , è un' infinitamente grande d' un'
ordine uguale alla differenza degli esponenti .

$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty}$. Dunque il quoziente d' un' in-
finitamente grande diviso per un' infinitamente
grande d' un ordine superiore , è un' infinitamen-
te piccolo uguale alla differenza degli esponenti.

*Alcune nozioni sulle Serie: della Natura, e
della Formazione delle Serie.*

362. **S**I chiama *serie* una unione di termini,
che presi successivamente crescono, o
O de-

decrefcono fecondo una medefima legge: tali fono le progreflioni arimmetiche , e geometriche .

363. Si chiama *serie finita* quella, il cui numero de' termini è limitato ; e *serie infinita* quella, che fi fuppone continuata fino all' infinito .

364. Le serie , i cui termini vanno aumentando, fi chiamano *divergenti*; e quelle i cui termini vanno diminuendo, fi chiamano *convergenti*.

Una serie tanto più diverge , o converge , quanto più rapidamente ciafcun termine crefce , o decrefce riguardo a quello , che lo precede .

365. I Matematici confiderano tre principali serie di numeri .

Quelle de' numeri figurati , o di differenti ordini , quelle de' numeri poligoni , e quelle de' e potenze .

I. Le serie de' numeri figurati cominciano così

N U M E R I	Costanti , o del 1° . ordine .	1. 1. 1. 1. 1. ec.
	Naturali , o del 2° . ordine .	1. 2. 3. 4. 5. ec.
	Triangolari , o del 3° . ordine .	1. 3. 6. 10. 15. ec.
	Piramidali , o del 4° . ordine .	1. 4. 10. 20. 35. ec.

366. La Legge di ciafcuna serie de' numeri figurati è che ciafcuno de' loro termini è la fomma de' termini corrifpondenti della serie precedente . Così la feconda serie è formata dall' addizione continua dell' unità; i termini della terza serie fono formati dell' addizione continua di quelli della feconda . Per efempio $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$. ec.

367. II. I Numeri poligoni fono numeri formati dalla fomma de' termini fucceffivi d' una progreflione arimmetica , che comincia da 1.

E quefti numeri fi chiamano triangolari , quadrati , pentagoni ec. fecondo che la differenza, che regna nella progreflione è 1, 2, 3, 4, ec. Per efempio ,

Pro-

Progressioni Arimmetiche.

1 2 3 4 5, ec. Diff. 1.....

1 3 5 7 9, ec. Diff. 2.....

1 4 7 10 13, ec. Diff. 3.....

1 5 9 13 17, ec. Diff. 4.....

Numeri Poligoni.

1 3 6 10 15 ec. Triangolari.

1 4 9 16 25 ec. Quadrati.

1 5 12 22 35 ec. Pentagoni.

1 6 15 28 45 ec. Esagoni.

Si chiamano poligoni, perchè essi rappresentano i numeri de' punti necessarj per riempire gli spazj de' poligoni regolari, disponendo questi punti in simmetria sopra linee tirate parallelamente a' lati di questo poligono.

368. III. Le serie delle potenze de' numeri sono quelle de' quadrati, de' cubi, ec. de' termini successivi della serie de' numeri naturali 1; 2. 3. 4. 5. ec.

369. Oltre queste differenti serie di numeri (che si possono generalizzare per mezzo di espressioni algebriche) se ne incontrano sovente delle altre . Per esempio una frazione decimale , come 0,3543 , non è altra cosa , che la serie $\frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{3}{10000}$ (98) . Uno stesso numero diviso successivamente per li termini d'una progressione arimmetica come $\frac{7}{1} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{6}$ ec. forma una serie, che si chiama *una progressione armonica (a)*. Si possono

O 2

fa-

(a) Quattro numeri sono in *proporzione armonica*, quando la differenza fra'l 1°, e'l 2°, stà alla differenza fra il 3°, e'l 4°, come il 1° numero stà al 4°. Quindi i numeri 4, 2, 9, 6, saranno in pro-

fare similmente ad arbitrio serie composte di più altre, facendo sopra di loro, termine per termine qualche

proporzione armonica, poichè si può dir così: 2 (diff. tra il 1° e'l 2°, stà a 3 (diff. fra'l 3°, e'l 4°) come 4 (1°. numero) a 6 (4°. num.). Onde esprimendo tutto ciò in termini generali, si potrà facilmente sciogliere il Problema: *Dopo tre quantità date, trovare la quarta proporzionale armonica.* Poichè siano a, b, c , la quantità date; e sia x la quarta, che si cerca: sarà $b-a : x-c :: a : x$. Onde $ax-ac = bx-ax$; e $2ax-bx = ac$: e perciò $x =$

$\frac{ac}{2a-b}$. Or facendo $a=4$; $b=2$; $x=9$; per la $2a-b$

divisata formola $x = \frac{ac}{2a-b}$ si troverà $x=6$, come nell'

esempio proposto.

Quindi in ogni *progressione armonica* avremo i quattro termini or divisati, se s'avverta, che il 2°. termine si ripete due volte, e fa così le veci di 2°. e 3°. termine, onde il 3°. verrebbe a far le veci del 4°. Quindi nella *progressione armonica* 8, 12, 24, ec. si può dir così: 4 (diff. fra'l 1°. e'l 2°.) stà a 12 (diff. fra'l 2°. e'l 3°.) come 8 (1°. termine) a 24 (ultimo termine). E però anche le frazioni citate dall'autore $\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}$, ec. *sa* in *progressione armonica*, poichè riducendole a un comune denominatore, avremo le equivalenti $\frac{4}{6}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$, nelle quali $\frac{2}{3}$ (diff. fra la 1°. e la 2°. frazione) stà a $\frac{4}{5}$ (diff. fra la 2°. e la 3°.) come $\frac{4}{6}$, a $\frac{4}{5}$: cioè 35:21::140:84.

Quindi si può facilmente sciogliere un secondo Problema: *Proseguire una progressione armonica, della quale sien dati il 1°. e'l 2°. termine.* Poichè ripetendo due volte il 2°. termine, si scioglierà il problema presente, come quello proposto poc anzi.

E finalmente potremo sciogliere un terzo Problema: *Fra due quantità date trovare la mezza proporzio-*

cheduna delle operazioni dell'arimmetica. Tale farebbe, per esempio, la serie $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{16}{9} \cdot \frac{32}{11}$ ec. che si è formata, mettendo per numeratori i termini d'una progressione geometrica dupla; e per denominatori i prodotti del primo, de' due primi, de' tre primi, de' quattro primi ec. numeri spari. Ora quando la legge, secondo la quale una serie è composta non si presenta agli occhi, bisogna scriverla sotto una forma, che la faccia riconoscere. Per esempio, nell'ispezione della serie precedente si riconosce facilmente, che i numeratori sono in progressione geometrica, ma non si vede come i denominatori sono stati formati. Se dunque si mette sotto questa forma (dove si sono messi i punti per lo segno $\times$, il che si pratica ordinariamente nell'espressioni delle serie),

$\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1 \times 2} \cdot \frac{4}{1 \times 2 \times 3} \cdot \frac{8}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \cdot \frac{16}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ ec., nelsi-

1. 1.3. 1.3.5. 1.3.5.7. 1.3.5.7.9.

na cosa sarà più facile, che il riconoscerne la legge.

370. Si riducono sovente in serie infinite le quantità, che non si possono scomporre senza residuo: tali sono i quozienti de' termini, che non sono multipli del divisore, e le radici delle potenze imperfette. Per esempio, sia

proposto di trovare il quoziente di $\frac{1}{1+x}$; o:

proportionale armonica. Sia la prima quantità a , l'altra b , sarà la media x . Or per la natura della proporzione armonica $x-a : b-x :: a : b$. E poi $ax+bx=$

$2ab$; e finalmente $a = \frac{2ab}{a+b}$. Or facendo $a=10$; b

$=40$; sarà $x=16$, che si troverà una mezza proporzionale armonica, poichè $16-10=6 : 40-10=30 :: 10 : 40$; e più brevemente $6:24 :: 10 : 40$.

perando come nel calcolo de' decimali si troverà
 $= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$ ec. Imperocchè, facen-
do $\frac{1}{1+x} = 1$, poi $1 \times \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$, togliendolo
dal dividendo, si ha $1 - 1 - x = -x$. Il pri-
mo termine del quoziente è dunque 1, e l're-
siduo $-x$. Dividendo questo residuo per 1, si
ha il secondo termine del quoziente, che è
 $-x$. Or $-x \times \frac{1}{1+x} = -x - x^2$: togliendo que-
sto da $-x$, resta x^2 . Dividendo anche questo
residuo per 1, si ha $+x^2$ terzo termine del di-
videndo, e così degli altri.

Si trova similmente, che $\frac{a}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2}$
 $+ \frac{axx}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4} + \frac{ax^4}{b^5}$ ec.; e inoltre che $\frac{aa}{x+b}$
 $= \frac{aa}{x} - \frac{aab}{x^2} + \frac{aab^2}{x^3}$ ec.

371. Sia proposto di ridurre $\sqrt{aa-xx}$ in
una serie infinita, si avrà $a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}$
 $- \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}}$ ec.

Imperocchè la radice quadrata del primo
termine aa è a , togliendo aa dalla quantità da-
ta $aa-xx$, resta $-xx$, che bisogna dividere
per $2a$, e si ha $-\frac{xx}{2a}$, secondo termine della

radice; il suo quadrato è $-\frac{x^4}{2aa}$, e 'l suo pro-
dot-

dotto per $2a$ è $-xx$; tolgaſi dunque queſto dal primo reſiduo $-xx$, e ſi ha un ſecondo reſi-

duo $-\frac{4aa}{x^4}$ che biſogna dividere pel doppio di

$a - \frac{xx}{2a}$, ch'è $2a - \frac{xx}{a}$; ſi ha dunque $-\frac{x^4}{8a^3}$

per terzo termine della radice, il ſuo quadra-

to è $-\frac{64a^6}{x^8}$, e 'l ſuo prodotto per $2a - \frac{xx}{a}$

è $-\frac{2ax^4}{8a^3} + \frac{x^6}{8a^4}$, togliendolo dal ſecondo re-

ſiduo $-\frac{x^4}{8a^3}$. E riducendo, ſi ha un terzo re-

ſiduo $-\frac{4aa}{x^6}$, e continuando ſempre le ſteſſe

operazioni ſi hanno gli altri termini.

Sia, per eſempio, $a=5$, $x=3$, dunque
 $aa-xx = 25-9 = 16$, e $\sqrt{aa-xx} = 5 - \frac{6}{10} - \frac{81}{1000} - \frac{726}{100000} = 4$. cc.

Si avrà ſimilmente $\sqrt{aa+xx} = a + \frac{xx}{2a}$

$$= a + \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}, \text{ cc. } \text{E } \sqrt{aa+bx-xx} = a + \frac{bx}{2a} - \frac{xx}{2a} - \frac{b^2xx}{8a^3} \text{ cc.}$$

372. Onde si vede, che quando si hanno i primi termini d'una serie, che si trova per la scomposizione, bisogna procurare di scoprir la legge colla quale cammina: imperocchè allora possiamo terminar l'operazione, e continuar la serie osservando questa legge, quando si sia stabilita, per un numero sufficiente di termini.

Per esempio, esaminando la serie, che esprime la radice di $aa - xx$, si vede facilmente, che ella è uguale ad a più tutti i prodotti de' termini d'una progressione geometrica (della qua-

le il primo è $\frac{xx}{a}$ e 'l quoziente è $\frac{xx}{aa}$) multipli-

cati successivamente per $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$ ec. Dunque ora non si deve far altro, che trovar la legge di questi coefficienti, la

quale è $\frac{1}{2}, \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}, \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}, \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}$ ec. I numeratori sono i ter-

mini della serie naturale de' numeri spari crescenti, e i denominatori sono i termini della serie naturale de' numeri pari crescenti: e questi termini sono moltiplicati due, tre, quattro ec. insieme successivamente: indi le frazioni, che se ne formano sono ridotte all'espressioni le più semplici.

Della Somma delle Serie.

373. **S**I possono fare sulle serie tutte le operazioni dell'arimetica, ma la più utile di

di tutte, e nel tempo stesso la più difficile, consiste a *sommarle*, cioè a ridurre in una sola espressione finita tutti i termini d'una serie data. Imperocchè in questa espressione ordinariamente consiste la soluzione de' Problemi, ne' quali entrano le serie, ed egli è facile di ridurre la maggior parte de' problemi a trovar la somma d'una serie infinita, poichè la soluzione d'un Problema dipende dalla scomposizione de' termini dell'equazione, che l'esprime.

374. Egli è chiaro, che se una serie infinita è sempre divergente, la somma non può essere finita; ma se ella è convergente la somma è sovente finita, come si vedrà in appresso.

Noi non possiamo però entrare in un gran dettaglio sopra questo soggetto, che fa una delle più considerabili parti dell'analisi; noi spiegheremo solamente la maniera di sommare qualcheduna delle serie le più in uso, e principalmente quelle delle quali avremo bisogno nella Geometria.

375. L'arte di sommar le serie in generale consiste a trovare un metodo di sommarne alcune, che si prendono poi per formole, alle quali bisogna ridurre, se è possibile, le serie, che si vogliono sommare; o pure bisogna scomporre le serie in più altre riducibili ad alcuna delle formole; e per conseguenza sommabili, e poi aggiunger insieme le somme di ciascuna di queste serie parziali.

376. I. Per esempio, avendo trovata una formola per sommare tutti i termini d'una progressione geometrica decrescente all'infinito, si potranno sempre sommar le serie, che si scomporanno in più altre serie, che siano in progressi-

gressione geometrica decrescente.

Sia $\div \frac{d}{b}, \frac{d}{bq}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3}, \frac{d}{bq^4}, \dots, \frac{d}{bq^\infty}$ una progressione infinita, che decresce a causa che i denominatori vanno sempre crescendo (supponendo q maggiore di 1). Scrivendo $\div \frac{d}{bq^\infty} \dots$

$\frac{d}{bq^4}, \frac{d}{bq^3}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq}, \frac{d}{b}$, si rende crescente, ed

applicandovi la formola $f = \frac{\omega q - a}{q - 1}$ (327) dove

$\omega = \frac{d}{b}, a = \frac{d}{bq^\infty}$, si avrà $f = \frac{\frac{dq}{b} - \frac{d}{bq^\infty}}{q - 1}$, e

trascurando il termine infinitamente piccolo $\frac{d}{bq^\infty}$, e riducendo, si ha $f = \frac{dq}{bq - b}$, e questa è la formola per sommare ogni progressione geometrica decrescente all'infinito.

377. Sia proposto di sommare una serie di frazioni i cui numeratori siano in progressione aritmetica, e i denominatori in progressione geometrica.

Questa serie è $\frac{a}{b}, \frac{a+d}{bq}, \frac{a+2d}{bq^2}, \frac{a+3d}{bq^3}$ ec.

Mettetela prima sotto questa formola $\frac{a}{b}, \frac{a}{bq} +$

$$\frac{d}{bq}, \frac{a}{bq^2} + \frac{d}{bq^2} + \frac{a}{bq^3}, \frac{d}{bq^3} + \frac{a}{bq^3} +$$

$$\frac{d}{bq^3} + \frac{a}{bq^3} \text{ ec. da questa voi ne potrete dedurre}$$

le serie seguenti, che non sono, che progressioni geometriche.

$$\div \frac{a}{b}, \frac{a}{bq}, \frac{a}{bq^2}, \frac{a}{bq^3} \text{ ec. la somma è } \frac{aq}{bq-b}$$

$$\div \frac{d}{bq}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3} \text{ ec. la somma è } \frac{bq-b}{d}$$

$$\div \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3} \text{ ec. la somma è } \frac{bq^2-bq}{d}$$

$$\div \frac{d}{bq^3} \text{ ec. la somma è } \frac{bq^3-bq^2}{d}$$

$$\text{Or queste somme (eccetto la prima) forma-}$$

$$\text{no la progressione } \div \frac{bq-b}{dq}, \frac{bq^2-bq}{dq}, \frac{bq^3-bq^2}{dq} \text{ ec.}$$

$$\text{la cui somma è } \frac{bq^3-2bq+b}{dq}; \text{ se dunque vi si}$$

$$\text{aggiugne la prima somma } \frac{aq}{bq-b} \text{ s'avrà}$$

$$\frac{aqq-aq+dq}{bq^3-2bq+b} \text{ per la somma delle somme, cioè}$$

$$\text{a dire per la somma di tutta la serie proposta.}$$

E que-

E questa è una formola generale per sommare tutte le serie delle frazioni, che hanno i numeratori in progressione arimmetica, e i denominatori in progressione geometrica.

378. OSSEK. Quando non si può sommare in termini finiti una serie infinita, bisogna procurare di metterla sotto una forma tale, che sia la più convergente, che sia possibile: Imperocchè quando una serie converge velocissimamente, basta sommare effettivamente alcuni de' suoi primi termini, e si possono indi trascurare gli altri senza error sensibile.

Per esempio, in $\sqrt{aa+xx}$, quanto è più piccolo il valore di x riguardo ad a , tanto più

la serie $a + \frac{xx}{aa} + \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5}$ ec. converge-

rà veloce, perchè i numeratori diventano piccolissimi a riguardo de' denominatori. Sia $a = 10$, e $x = 1$, allora $\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000}$ ec. dove si vede, che il quarto termine è di già come infinitamente piccolo, e che per conseguenza i tre primi termini bastano per aver presso a pochissimo la radice di 101 (a).

379. II. Sia proposto di indagar le formole per trovare quanti termini successivi si vorranno delle potenze de' termini della serie de' numeri naturali. Per giungervi, io ragiono così. Poichè i termini successivi della serie de' numeri differiscono per una unità, egli è chiaro, che, se se ne prendano alcuni, come l, m, n, p, q, r si avrà $r = q + 1$, $q = p + 1$, $p = n + 1$, $n = m + 1$, $m = l + 1$. Or, se si elevino questi termini alle potenze successive, si avrà.

(a) La quale vien ad essere $10 \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000}$.

$$\begin{array}{l|l}
 r^2 = q^2 + 2q + 1 & r^3 = q^3 + 3q^2 + 3q + 1 \\
 q^2 = p^2 + 2p + 1 & q^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 \\
 p^2 = n^2 + 2n + 1 & p^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
 n^2 = m^2 + 2m + 1 & n^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 \\
 m^2 = l^2 + 2l + 1 & m^3 = l^3 + 3l^2 + 3l + 1
 \end{array}$$

$$r^4 = q^4 + 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1$$

$$q^4 = p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1$$

$$p^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

$$n^4 = m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1$$

$$m^4 = l^4 + 4l^3 + 6l^2 + 4l + 1$$

E, se si uniscano queste potenze in una sola equazione si avrà.

$$\begin{array}{l|l}
 r^2 = + 2q + 1 & r^3 = + 3q^2 + 3q + 1 \\
 + 2p + 1 & + 3l^2 + 3p + 1 \\
 + 2n + 1 & + 3n^2 + 3n + 1 \\
 + 2m + 1 & + 3m^2 + 3m + 1 \\
 l^2 + 2l + 1 & l^3 + 3l^2 + 3l + 1
 \end{array}$$

$$r^4 = + 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1$$

$$+ 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1$$

$$+ 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

$$+ 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1$$

$$l^4 + 4l^3 + 6l^2 + 4l + 1$$

Donde si dedurranno questi teoremi generali. Quando si hanno più termini successivi della serie de' numeri naturali 1°. il quadrato r^2 dell'ultimo di questi termini è uguale al quadrato l^2 del primo di questi termini, più 2 volte la somma $q + p + n + m + l$ de' termini, che precedono l'ultimo, più il numero $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ di questi stessi termini precedenti. 2°. Il cubo r^3 dell'ultimo di questi termini è uguale al cubo l^3 del primo, più 3 volte la somma de' quadrati de' termini precedenti, più

più 3 volte la somma di questi stessi termini, più il loro numero. 3°. La quarta potenza r^4 è uguale alla quarta potenza del primo, più 4 volte la somma de' cubi de' termini precedenti, più 6 volte la somma de' loro quadrati, più 4 volte la somma di questi termini, più il loro numero. E così dell'altre potenze più elevate.

381. Onde segue, che chiamando a un primo termine qualunque, ω l'ultimo, il numero de' termini, che precedono l'ultimo sarà $\omega - a$, se dunque si chiami f la somma di questi termini, f^2 la somma de' loro quadrati, f^3 la somma de' loro cubi ec. si avrà $f - \omega$ per la somma di tutti i termini, che precedono l'ultimo, $f^2 - \omega^2$ quella di tutti i loro quadrati, $f^3 - \omega^3$ quella de' loro cubi ec. Ed il primo teorema precedente sarà espresso per questa formola $\omega^2 = a^2 + 2f - 2\omega + \omega - a$, e riducendo $\omega^2 = a^2 - a + 2f - \omega$. Il secondo per $\omega^3 = a^3 + 3f^2 - 3\omega^2 + 3f - 3\omega + \omega - a$, ovvero $\omega^3 = a^3 - a + 3f^2 - 3\omega^2 + 3f - 2\omega$. Il terzo per $\omega^4 = a^4 + 4f^3 - 4\omega^3 + 6f^2 - 6\omega^2 + 4f - 4\omega + \omega - a$, o sia $\omega^4 = a^4 - a + 4f^3 - 4\omega^3 + 6f^2 - 6\omega^2 + 4f - 3\omega$ ec.

Dalla prima formola si deduce $f = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$. E sostituendo questo valore nella seconda si ha $\omega^3 = a^3 + 3f^2 - \frac{3}{2}\omega^2 - \frac{3}{2}\omega - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$, e per conseguenza $f^2 = \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{3}{8}\omega + \frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{8}a$.

Sostituendo i valori di f^2 , e di f nella terza formola si ha, riducendo, $\omega^4 = a^4 + 4f^3 - 2\omega^3 - \omega^2 - 2a^3 + a^2$, e per conseguenza $f^3 = \frac{1}{4}\omega^4 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^2 - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{4}a^2$. E così delle altre potenze.

382. Se il primo termine delle serie è 0 ,
OV-

ovvero 1 si ha $f = \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} \omega$, $f^2 = \frac{1}{2} \omega^3 + \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{1}{2} \omega$, $f^3 = \frac{1}{2} \omega^4 + \frac{1}{2} \omega^3 + \frac{1}{2} \omega^2$.

De' Rapporti finiti, che hanno fra loro le somme infinite di serie infinite.

383. **Q**uantunque le somme di più serie siano infinite, e per conseguenza inassegnabili in termini finiti, non però si vedrà in appresso, ch'elleno sono d'un grand' uso in geometria, soprattutto quando se ne può cooscere il loro rapporto esatto.

Per esempio, si troverà che la somma de' quadrati d'una infinità di termini successivi della serie de' numeri naturali è il $\frac{1}{2}$ del prodotto dell'ultimo quadrato moltiplicato pel loro numero.

Imperocchè allora l'ultimo termine della serie de' numeri naturali essendo ∞ , sostituendo ∞ a ω nella formola della serie de' quadrati, si ha $f^2 = \frac{1}{2} \infty^3 + \frac{1}{2} \infty^2 - \frac{1}{6} \infty - \frac{1}{24} a^3 + \frac{1}{24} a^2 - \frac{1}{24} a$, che si riduce ad $f^2 = \frac{1}{2} \infty^3$, a causa che tutti gli altri termini sono infinitamente piccoli a riguardo di $\frac{1}{2} \infty^3$.

Ma il prodotto dell'ultimo quadrato ∞^2 per lo loro numero, che è ∞ , è ∞^3 : dunque la somma de' quadrati è il terzo di questo prodotto.

384. Per un calcolo simile, si trova, che la somma d'un infinità di cubi successivi, è il $\frac{1}{4}$ del prodotto dell'ultimo cubo per lo loro numero. Imperocchè si ha $f^3 = \frac{1}{4} \infty^4$. Ed in generale la somma delle potenze finite m d'un infinità di termini successivi della serie de' numeri natu-

rali è $\frac{1}{m+1}$ del prodotto della potenza ∞^m dell'ul-

l'ultimo termine moltiplicato per lo loro nu-

mero ∞ , o sia $f^m = \frac{1}{m+1} \infty^{m+1} = \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$, il

che può applicarsi anche alle somme delle stesse radici de' termini successivi della serie de' numeri naturali.

Imperocchè, se si tratta, per esempio, delle radici quadrate, allora $m = \frac{1}{2}$ (173), ed $m+1$

$= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, $\frac{1}{m+1} = \frac{2}{3}$ (a). Dunque la somma del-

le radici quadrate d'un'infinità di termini della serie de' numeri naturali, è due terzi del prodotto della radice quadrata dell'ultimo termine moltiplicato per lo loro numero. Imperocchè ella è $\frac{2}{3} \infty^{\frac{3}{2}}$, cioè a dire $\frac{2}{3} \infty^{\frac{1}{2}} \times \infty$.

For-

(a) Quando nella formola $\frac{1}{m+1}$ si sostituisca il

valore di m , s'avrà $\frac{1}{\frac{3}{2}}$, che s'esprime così $1 : \frac{3}{2}$.

Allora (95) subito si vedrà $\frac{1}{m+1} = \frac{2}{3}$. E in questo

caso $\frac{1}{m+1} \infty^{m+1} = \frac{2}{3} \infty^{\frac{3}{2}}$.

Formola generale per innalzare un binomio $a \pm b$ a una potenza qualunque, e per estrarne una qualunque radice.

L A formola è questa $(a \pm b)^m = a^m \pm m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 \pm \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{m-5} b^5 + \&c.$

Poichè se si formino successivamente le potenze del binomio $a \pm b$, s'avrà

$$\begin{aligned} (a \pm b)^1 &= 1a^1 \pm 1b^1. \\ (a \pm b)^2 &= 1a^2 \pm 2a^1 b^1 + 1b^2. \\ (a \pm b)^3 &= 1a^3 \pm 3a^2 b^1 + 3a^1 b^2 + 1b^3. \\ (a \pm b)^4 &= 1a^4 \pm 4a^3 b^1 + 6a^2 b^2 \pm 4a^1 b^3 + 1b^4. \\ (a \pm b)^5 &= 1a^5 \pm 5a^4 b^1 + 10a^3 b^2 \pm 10a^2 b^3 + 5a^1 b^4 + 1b^5. \\ (a \pm b)^6 &= 1a^6 \pm 6a^5 b^1 + 15a^4 b^2 \pm 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 \pm 6a^1 b^5 + 1b^6 \&c. \end{aligned}$$

Ciò posto, per trovare un'espressione generale, bisogna stabilire per una potenza qualunque la legge degli esponenti de' termini successivi, e quella pure de' coefficienti: La legge degli esponenti si presenta a prima vista; son eglino i numeri naturali da 1 fino a quello, che vien indicato dalla potenza; de' quali, quei di b vanno crescendo, e quei di a vanno scemando, di maniera che l'espressione generale di questa legge, senz'aver riguardo a' coefficienti, è la serie infinita $a^m \pm m a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 \pm a^{m-3} b^3 + \&c.$

La legge poi de' coefficienti (per cominciare da quello del secondo termine) è che ciascuno è il prodotto del primo, de' due primi, de' tre primi, de' quat-

tro primi, ec. termini della serie degli esponenti di a divisa pe' l' prodotto de' due primi, de' tre primi, de' quattro primi, ec. termini della serie degli esponenti di b . Per esempio nella sesta potenza, le due serie degli esponenti, sono

$$6, 5, 4, 3, 2, 1,$$

$$1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

$$\frac{6}{1}, \frac{6}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{5}{5}, \frac{4}{6}.$$

Se dunque si prenda $\frac{6}{1}, \frac{6}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{5}{5}, \frac{4}{6},$

$$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6}, \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{1},$$

$$\frac{6}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}, \text{ e}$$

riducendo queste frazioni all' espressioni le più semplici, si troverà 6, 15, 20, 15, 6, 1; e questi saranno i coefficienti de' termini successivi della sesta potenza di $a \pm b$, cominciando dal secondo termine (essendo sempre 1 il coefficiente del primo). Quindi segue, che l' espressione generale della legge di questi coefficienti

$$\text{ti è la serie } 1, \frac{m}{1}, \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}, \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ \&c. Sommando insieme que-}$$

ste due serie, si ha la formola generale.

Questa serie serve anche per un Polinomio qualunque, come $p+q+r=s$, facendo per esempio $p+q+r=a$, e $-s=b$. Serve inoltre per estrarre una radice qualunque, mettendo per m la frazione, che serve d'esponente a questa radice.

Infine questa formola è una serie, che finisce a quel termine, nel quale il coefficiente è divenuto $m-1$ l'esponente della potenza della quale si tratta: quindi per la 6. potenza, ella finisce al 7. termine, dove $m-6$ entra nel coefficiente, e in tutti quei del termini, che seguono, i quali sono tutti ridotti a Zero, accagione di $m-6=0$.

LEZIONI

ELEMENTARI

D I

MATEMATICA

Del Signor Abate de LA CAILLE

PARTE SECONDA.



NAPOLI MDCCLXIV.

PRESSO GIUSEPPE RAIMONDI

CON LICENZA DE' SUPERIORI.





PARTE SECONDA

Elementi di Geometria.

385.



A Geometria è una scienza ,
che dimostra le proprietà
delle quantità continue , o
della estensione.

Il continuo non ha che
tre dimensioni , la lunghez-
za , la larghezza , e la grossezza , o la profondità.

386. Benchè non vi sia continuo nella na-
tura , che non abbia sempre tutte insieme que-
ste tre dimensioni ; si può però frantanto con-
cepirle ciascuna in particolare indipendentemen-
te dalle altre , ovvero due insieme senza pen-
sare alla terza . Ciò accade , quando si pensa
alla lunghezza d'un camino , senza badare al-
la sua larghezza ; o quando si concepisce l'e-
stensione d'un piano , senza badare alla gros-
sazza delle terre , che lo compongono .

P 2

387.

387. Una dimensione considerata sola , si chiama *una linea* : due dimensioni unite insieme , fanno *una superficie* ; e le tre unitamente compongono *il corpo* , o *solido* .

388. I Geometri considerano ancora *il punto* come una quantità , le cui dimensioni sono infinitamente piccole ; e al quale per conseguenza non si può attribuire alcuna estensione finita .

SEZIONE PRIMA

DELLE LINEE.

Origine , e proprietà generali delle linee.

389. **S**I può concepire una linea formarsi dal movimento d' un punto . Se un punto si muova , senz' alcun traviamento , la sua traccia è *una linea retta* : s' e' travia nel suo cammino , descrive una *linea curva* .

390. Si può immaginare , che 'l punto descrive la linea per passi infinitamente piccioli ; or non si può concepire traviatazione in un passo infinitamente piccolo ; dunque ciaschedun passo del punto è una linea retta infinitamente piccola . Dunque , secondo questa idea , *la linea retta finita è una serie d' una infinità di ret-*

te infinitamente piccole, tutte poste in fila; e senza deviazione: e la linea curva finita è una serie d'una infinità di rette infinitamente piccole, situate differentemente le une a riguardo dell'altre.

391. Egli è chiaro, che per la infinita picciolezza di chiaschedun passo, si ponno le linee supporre uguali ciascuna al punto medesimo, che le ha descritte; e per conseguenza si può riguardare la linea come una serie di punti; ond'è chiaro.....

392. I. Che la linea retta è necessariamente la più corta, che si possa tirare fra due termini, e che perciò ella è la misura precisa della loro distanza.

393. II. Che non v'ha che una specie di linea retta, ma che ve n'ha una infinità di curve.

394. III. Che la posizione di due punti basta per determinare quella d'una linea retta; ma che ve ne bisognano più di due per determinare quella d'una curva.

Proprietà delle Linee rette.

DOMANDE.

395. I. **S**I suppone, che si possono tirare quante rette si vogliono sopra d'un piano; cioè a dire sopra una superficie talmente unita, che tutt'i punti, che la compongono sieno gli uni a riguardo degli altri in un medesimo

mo livello . Si mostrerà in appresso (613) la formazione Geometrica del Piano .

396. II. Si suppone , *che si possa determinare il punto della metà d'una retta finita situata sopra d'un piano* . Si darà frappoco la maniera di farlo geometricamente .

Proprietà delle Linee rette nella posizione d'una retta riguardo a un'altra .

397. Si concepisca una retta immobile AB (che io chiamerò la fissa AB) situata sopra d'un piano immobile (fig. 1.) ; si supponga un'altra retta (che io chiamerò la mobile AB) , uguale alla prima , e che talmente s'adatti sopra la prima , ch'ella non faccia con' essa se non una medesima linea . Si concepisca nel mezzo di questa retta un punto E , sopra del quale la mobile AB giri , in maniera che la sua parte EA avendo descritto su 'l medesimo piano la traccia AORB , venga a posarsi esattamente sopra la parte EB della fissa ; mentre la parte EB della mobile avendo descritta la traccia BVZA viene a posarsi esattamente sulla parte fissa EA .

Ciò posto , la mobile avrà descritta una figura , alle parti della quale si danno più nomi , quali è necessario sapere .

398. DEFINIZIONI . I. Tutta la figura descritta dalla mobile , si chiama *un cerchio* . La
linea

linea curva ARBYA , che lo termina , si chiama *la circonferenza del cerchio* : e 'l punto E intorno al qual'è descritta la circonferenza s'appella *il centro* .

399. II. Le parti determinate qualunque d'una circonferenza, come AN, ANO, ORT, &c. si chiamano *archi del cerchio* .

400. III. La linea EA, che co'l suo moto su'l centro E descrive il cerchio, si chiama *raggio del cerchio* . E generalmente si chiamano raggi tutte le rette , che si tirano dal centro d'un cerchio alla sua circonferenza, come EO, ER, EX, &c.

401. COROLLARIO. Quindi *tutt' i raggi d'un medesimo cerchio , o di due cerchj uguali , sono uguali fra di loro* ; onde il cerchio si può definire anche , una figura terminata da una curva , di cui tutt' i punti sono egualmente lontani da un punto , che sta dentro , e che si chiama *il centro* .

402. IV. La retta AB, che divide il cerchio in due parti uguali , passando pe'l suo centro , si chiama *il diametro del cerchio* . E in generale si chiamano diametri del cerchio tutte le rette , che passando pe'l centro , sono terminate dall'una , e l'altra parte nella circonferenza ; tali sono OV, PX, RZ, &c.

403. La circonferenza di qualunque cerchio si divide in 360 parti uguali , chiamate *gradi* ; (115) ciaschun grado si suddivide in 60 parti uguali , che si chiamano *minuti* , e ciaschun minuto in 60 *secondi* , ciaschun secon-

do in 60 *terzi*, &c. Queste parti non sono grandezze assolute, come sono le misure ordinarie de' pesi, de' piedi, &c; ma sono grandezze proporzionate alla grandezza del cerchio; di maniera che un grado d'un gran cerchio è più grande, che un grado d'un cerchio piccolo.

404. Esaminiamo adunque, che accade per lo movimento della mobile. Egli è chiaro I, che avanti che la mobile avesse cominciata a muoversi, ella non tagliava la fissa, ella non gli era inclinata; ma tutt' i suoi punti cuoprivano esattamente tutt' i punti corrispondenti della fissa.

405. II. Che la mobile non può girare sopra uno de' suoi punti com' E, sicchè tutti gli altri punti non si muovano nel medesimo tempo, e non facciano ciascuno un' egual numero di passi.

406. Subito che la mobile comincia a muoversi, tutt' i suoi punti si scostano tanto più da una parte, e dall' altra da' punti corrispondenti della fissa, quanto essi si trovano più lontani dal punto E, che rimane commune alle due linee; e per conseguenza la mobile taglia la fissa nel punto E, e le parti di questa mobile diventano inclinate a quelle della fissa. Per esempio, quando la mobile nel suo movimento è divenuta NET, non gli è rimasto altro di commune con la fissa, che 'l punto E; il punto N s'è molto più scostato dal punto A, che ogni altro punto compreso tra N, ed E, come »
dal

dal suo corrispondente a nella fissa, quantunque questo punto n abbia fatto altrettanti passi per venire di n in a , quanti ne ha fatti il punto N per venire di A in N . Egli accade lo stesso del punto T per riguardo a B : La linea NET dunque ha tagliata la fissa in E , e le sue parti NE , ET sono divenute inclinate sulla fissa: In maniera che l'idea della inclinazione di due rette abbraccia quella della loro intersezione attuale, o possibile col prolungarle.

407. Una retta, ch'è inclinata a un'altra, che la taglia, o che si termina nel rincontrarla, fa con ella un'angolo nel punto d'unione; così le parti NE , AE fanno in E l'angolo NEA .

408. Un'angolo esprime la quantità dello scostamento d'una retta per rapporto a un'altra, che l'incontra; così quanto più queste rette sono discoste, più elleno fanno un'angolo maggiore.

409. Egli è chiaro, che la misura dello scostamento di due rette è 'l numero de' passi uguali, che ciascun punto della mobile ha fatto per dilungarsi dal punto corrispondente della fissa; poichè se 'l punto A della mobile ha fatto una volta più di passi per venir d' A in P , che per venir da A in N , egli è manifesto, ch'essendo in P , s'è dilungato del doppio di quel, ch'era essendo in N , e che perciò l'angolo AEP è doppio dell'angolo AEN . Egli è anco evidente, che 'l punto a della mobile

bile ha fatti tanti passi per venir in n , poi in p , quanti ne ha fatti il punto A per venir prima in N ; poi in P ; e che così se'l punto a ha fatto una volta più di passi per venir in p , che per venire in n , la linea EP s'è una volta più distaccata dalla fissa AE , che la linea EN . Donde segue

110. TEOREMA I. Che la misura d'ogni angolo rettilineo è l'arco d'un cerchio qualunque, che ha il centro alla sommità dell'Angolo, e che si trova compreso tra le due rette, che formano l'angolo. Così quando si dice, che un'angolo è di 20 gradi, s'intende, ch'egli ha per misura un'arco di cerchio di 20 gradi.

411. TEOR. II. Che tutti gli angoli, che anno per misura archi d'egual numero di gradi, sono uguali fra di loro: e reciprocamente, che tutti gli archi descritti in un medesimo angolo, o in angoli uguali, che anno il lor centro alla sommità dell'angolo, sono d'un medesimo numero di gradi.

412. TEOR. III. Ch'essendo conosciuta la grandezza d'un'angolo, si conosce la grandezza dell'arco, ch'egli può intercettare ne' suoi lati: e reciprocamente, che sapendo la quantità de' gradi d'un'arco, che avendo il suo centro alla sommità d'un'angolo, è terminato dai suoi lati, si fa la grandezza dell'angolo. * E più chiaramente; che conosciuta la quantità de' gradi d'un'arco, si fa la grandezza dell'angolo, che ha il vertice nel centro dell'arco, e abbraccia ne' suoi lati l'arco medesimo. *

413. Or, se si considera attentamente il movimento circolare della mobile sulla fissa, si vedrà, ch'ella passa per tutte le posizioni possibili riguardo a quella, e ch'ella fa così con quella tutti gli angoli possibili.

Quando la mobile inchina più dalla parte EA, d'ond'è partita, che dalla parte della fissa opposta EB; fa gli angoli AEN, AEO, &c, che si chiamano *acuti*.

414. Que' poi si chiamano *retti* come AEP, PEB, quando la mobile divenuta PE, non inclina più verso AE, che verso EB.

415. Una retta, che fa un'angolo retto con un'altra, gli è *perpendicolare*: così PE è perpendicolare ad AE, ad EB, o anche a tutta la retta AB; e reciprocamente EA, EB, o AB sono perpendicolari ad EP.

416. Tutti quegli angoli finalmente come AEQ, AER, &c. si chiamano *ottusi*, quando la mobile è divenuta più inclinata verso la parte fissa EB, che verso la parte fissa AE, d'ond'ella è partita. * E in generale si chiama angolo *acuto*, quando è contenuto nell'angolo retto, cioè quando è minore d'un retto: e quando un'angolo contiene in se un retto, o sia quando è maggiore d'un retto, si chiama *ottuso*. *

Si può applicare tutto questo alla mobile EB, che descrive il semicerchio BVZA.

417. TEOR. IV. Tutti gli angoli acuti sono più piccoli de' retti, e degli ottusi; e tutti gli angoli retti sono più piccoli degli ottusi.

418. TEOR. V. *Ei v'ha una infinità di sorte d'angoli acuti, e ottusi; ma l'angolo retto è unico nella sua specie.*

419. TEOR. VI. *Gli angoli retti sono tutti uguali fra di loro; poichè essi sono formati dalle rette, che nell'incontrarsi non pendono più da un lato, che dall'altro.*

420. COROLL. I. *La misura di due angoli retti è una mezza circonferenza d'un cerchio; e per conseguenza la misura d'un angolo retto è un'arco di 90 gradi.*

421. COROLL. II. *Un'angolo acuto ha per misura un'arco minore di 90°; e un'angol'ottuso è misurato da un'arco maggiore di 90°.* (416.)

422. TEOR. VII. *Per un punto dato in una retta una sola perpendicolare a questa retta può passare in un medesimo piano. Perchè in un solo caso la mobile può essere ugualmente inchinata sopra la fissa.*

423. TEOR. VIII. *Tutta la circonferenza d'un cerchio non può misurare più di quattro angoli retti. Perchè tutta la circonferenza APBXA è occupata da quattro angoli retti AEP, PEB, BEX, XEA; o pure perchè quattro volte 90° valgono 360°.*

424. COR. *Dunque la somma di tutti gli angoli che stanno intorno ad un punto fisso non passano 360° o il valore di quattro angoli retti.*

425. TEOR. IX. *Una retta qualunque, come OE, cadendo sopra un'altra AB fa con quella due angoli AEO, OEB, la somma de' quali vale*
sem

sempre 180° , o la misura di due angoli retti. Poichè gli archi ANO, ORB, che gli misurano, formano la semicirconferenza AORB.

426. COROL. Tutte le rette, che terminano in un punto con un'altra retta, fanno con quella angoli, la cui somma è 180° .

427. Si chiama *angolo del supplemento* quello, che congiunto ad un'altro fa con esso 180° . Tal' è OEB a riguardo di OEA, ed OEA a riguardo ad OEB: e si chiama *angolo del complemento* quello, che congiunto ad un'altro fa con esso un angolo retto.

428. TEOR. X. Di 4. angoli AEO, EOB, BEU, UEA formati per l'intersezione di due rette AB, OU, i due opposti al vertice E sono uguali. Così $AEO = BEU$, ed $OEB = UEA$.

DIM. Imperocchè la parte EA della mobile AB non può fare un passo per approssimarsi verso O, se l'altra parte EB non ne faccia un altro per andare verso U. Dunque EA fa tanti passi per divenire EO, quanti ne fa EB per divenire EU: Dunque l'arco AO è di tanti gradi, di quanti è l'arco BU. Dunque l'angolo $AEO = BEU$. Dell'istessa maniera dimostrando, si trova l'angolo $OEB = UEA$.

COR. Se si conosce uno de' quattro angoli, che sono al vertice, si conoscono anche gli altri.

*Proprietà delle linee rette nella posizione di una
a riguardo di due, o di più altre,
senza racchiudere spazio.*

429. Concepite dapprima una retta (fig. 2) CD talmente posta a riguardo della fissa AB, ch'ella ne sia per tutto ad ugual distanza, come se la retta AB fosse talmente scorsa da AB in CD che la sua parte IC non fosse mai calata più verso AE, che ID verso EB; in questo caso la retta CD è detta *parallela* ad AB, ed egli è chiaro, che queste due rette non sono inclinate l'una sopra l'altra, e ch'elleno non possono giammai dividersi, a qualunque distanza si prolunghino. Fate indi girare come quì sopra la retta AB sopra il punto di mezzo E, voi vedrete evidentemente
te

430. I. Che la mobile non potrà giammai incontrar CD sempre che combacerà con la retta fissa AB, poichè l'una e l'altra non fanno allora, che una sola, e stessa linea parallela a CD.

431. II. Che tosto che la mobile AB avrà fatto il minimo movimento sopra il punto E ella incontrerà, e dividerà CD, se si suppongono prolungate sufficientemente, poichè allora una parte della mobile AB farà inclinata verso CD, e ciascuno de' suoi punti
si

si faranno tanto più approssimati a questa retta CD , quanto più e' sono lontani dal punto E .

432. III. Che la mobile passando per tutt' i gradi d' inclinazioni per rapporto alla fissa, passerà ancora per tutt' i medesimi gradi d' inclinazioni per rapporto alla parallela CD , e farà sempre con quella angoli, che saranno uguali a quelli, che farà con la fissa.

Imperocchè supponghiamo la mobile rimasta nella posizione NT ; poichè la retta CD è parallela ad AB , dopo ch' ella è scorsa dalla posizione di AB (nella quale faceva con NT l' ang. AEN) alla posizione di CD , senz' acquistare alcuna inclinazione per rapporto ad AB , egli è chiaro che NT , ed AB essendo restate fisse, la retta CD non ha potuto acquistare altra inclinazione per rapporto a NT , che quella ch' ella aveva nella posizione di AB ; e che così l' angolo CGN che misura l' inclinazione sopra NT è uguale all' angolo AEN , che misura l' inclinazione di AB sopra NS . Per la stessa ragione gli angoli TEB , EGD sono uguali fra loro, e gli angoli AET , CGE , NGD , NEB sono ancora uguali fra loro, e gli angoli acuti sono i supplementi degli ottusi (425), e reciprocamente gli angoli ottusi sono supplementi degli angoli acuti.

L' angolo TEB si chiama *alternò esterno* per rapporto all' angolo CGN , come l' angolo TEA per rapporto a NGD . E l' angolo AEG

si

fi chiama *alternò interno* per rapporto all'angolo EGD , come GEB per rapporto a EGC.

Si dimostrerà l'istessa cosa di tutte le rette NT OU , &c. , per rapporto ad AB , CD .

433. TEOR. I. *Una linea qualunque DE ebe divide due parallele AB , CD , fa con quelle gli angoli alterni interni uguali , gli angoli alterni esterni uguali , due angoli interni BEG , EGD supplementi l' uno dell' altro , * o uguali a due retti * ; e due esterni TEB , DGN ancora supplementi l' uno dell' altro , * o eguali a due retti ; * e reciprocamente tutte le volte che due rette BE , DG cadendo sopra d' un'altra TN fanno gli angoli alterni interni uguali , o gli angoli alterni esterni uguali , o due angoli interni BEG , EGD supplementi l' uno dell' altro , * o uguali a due retti , * o i due esterni TEB , DGN ancora supplementi l' uno dell' altro , * o uguali a due retti * , le due rette BE , DG sono parallele fra loro .* Perchè ciò affatto non può accadere , se queste due linee non siano precisamente poste della stessa maniera l' una a riguardo dell' altra .

434. OSSERV. Quello , che si dice quì di due rette parallele deve intendersi di quante rette si vogliano , quando esse siano parallele fra loro . Imperocchè le proprietà della prima parallela riguardo alla seconda , sono le stesse , che quelle della seconda riguardo alla terza , e quelle della terza riguardo alla quarta , e così delle altre : dunque elleno convengono a tutte queste parallele .

435. IV. La mobile continuando a girare egli è chiaro, che i punti F, G, H, della intersezione con CD, quanto più s'approssimano al punto E, tanto più la mobile s'avvicina ad essere perpendicolare alla fissa AE: di maniera che, quando ella lo farà, il punto I della sua intersezione con CD sarà il più vicino al punto E, che sia possibile: sicchè al mobile continuando ad andare verso EB, i punti d'intersezione K, L, M diverranno tanto più lontani da E, quanto la mobile s'inclinerà più verso EB.

436. V. Dunque, quando la mobile abboccherà tanto verso la fissa BE, essendo divenuta ER, quanto s'abboccava verso AE, quando era EN; o ciò ch'è lo stesso, quando gli angoli AEN, BER, o NEP, REP faranno uguali, i punti d'intersezione G, L faranno ad uguale distanza dai punti E, ed I, cioè a dire s'avrà $GI = IL$, e $GE = LE$.

Per convincersene bisogna concepire tutta la figura 2 piegata sulla perpendicolare EP, il perchè allora egli è chiaro, che AE combacerà sopra EB, IC sopra ID, l'arco AN sopra il suo uguale BR, e l'arco NP sopra il suo uguale PR; dunque il raggio NE combacerà co'l raggio ER, e'l punto G co'l punto L; onde $GE = LE$, e $GI = IL$.

437. TEOR. II. Ogni perpendicolare come EI, tirata da un punto E sopra una retta qualunque CD, è la linea la più corta, che si pos-

fa tirare da questo punto a questa retta . E reciprocamente , se una retta EI è la più corta , che si possa tirare da un punto E ad un' altra retta CD , ella gli è perpendicolare ; imperocchè s' ella gli fusse inchinata , vi si potrebbe tirar la perpendicolare , che farebbe la più corta .

438. COR. Dunque una perpendicolare è la vera misura della distanza d' un punto ad una linea .

439. TEOR. III. *Da un punto E preso fuori d' una retta CD , non si può tirare , che una sola perpendicolare EI alla retta data . Poichè non v' ha che un sol punto , che sia il più vicino ad E , e un sol caso , che la retta tirata sopra l' altra non gl' inchini più da una parte , che dall' altra .*

440. TEOR. IV. *Una retta , com' EI , è perpendicolare a un' altra CD , quando due , de' suoi punti , per esempio , E , I , sono egualmente lontani da due punti G , L qualunque presi in quest' altra linea ; cioè a dire , se $EG = EL$, e se $IG = IL$: poichè allora è certo , che in questi due punti E , I , la retta GI non pende più verso G , che verso L ; e come due punti bastano per determinare (394) la posizione d' una retta , tutta la retta EI non pende più verso G , che verso L .*

441. TEOR. V. *Se due punti G , L d' una retta sono egualmente lontani da un punto I della medesima retta , ov' ella è tagliata da una perpendicolare EI , tutt' i punti di questa perpendicolare sono*

sono egualmente lontani da questi due medesimi punti G, L ; perchè se vi fusse qualche punto in questa perpendicolare, che non fusse ad ugual distanza dai punti G, L ; in questo punto la perpendicolare inclinerebbe più dal lato, ove la distanza sarebbe minore, e per conseguenza ella non sarebbe perpendicolare.

Dopo aver ben comprese queste proprietà, ci sarà facile sciogliere i problemi, che seguono.

442. PROBLEMA I. *Da un punto C (fig. 3.) preso fuori d'una retta data AB , bisogna tirare una parallela alla retta data.*

SOLUZIONE. Pofate la punta del compasso in C , e avendo descritto coll'altra punta, aperta a piacere, un'arco qualunque EK , posate la punta in E , e descrivete con la medesim'apertura l'arco CF , dal punto dato C , fino a che si rincontri con AB . Prendete co'l compasso la grandezza dell'arco CF , e portatela sopra l'arco EK da E fino a un qualche punto, come I , e per lo punto dato C , e'l punto trovato I , tirate la retta CID ; questa sarà parallela ad AB .

DIMOSTR. Poichè se si tiri CE , si conoscerà, che a cagion degli archi uguali EI, CF ; gli angoli CEF, ECI sono uguali (411); dunque EC è una retta, che taglia le rette AB, CD in maniera, che gli angoli alterni interni sono uguali; dunque (434) le rette CD, AB sono parallele.

443. PROBL. II. *Da un punto I preso sopra una*
 $Q \quad 2$
una

una retta CD , innalzare ad essa una perpendicolare (fig. 4.).

SOLUZ. Si prendono a piacere sopra la retta CD due punti H , e K egualmente lontani da I ; e coi punti H , e K come centri, si descrivano con la medesima apertura di compasso due archi di cerchio OER , AEB , che s'intersecano in un punto E , per lo quale tirate EI ; questa sarà perpendicolare a CD .

DIMOSTR. Poichè avendo tirat' i raggi HF , KE , egli è chiaro, ch'essi sono uguali a ragione della medesima apertura di compasso; e inoltre è $HI = IK$ per costruzione; dunque EI è una retta, di cui due punti E, I , sono egualmente lontani ciascuno da due altri punti H, K della retta CD ; Dunque (440) EI è perpendicolare sopra DE .

444. **PROBL. III.** Da un punto E preso fuori d'una retta CD , tirare sopra di essa una perpendicolare EG , (Fig. 5.).

SOLUZ. Avendo posta la punta d'un compasso sopra il punto dato E , segnate con l'altra punta due punti H, K , sopra la retta CD , che sieno ad ugual distanza da E ; indi coi punti H, K come centri, descrivete, con la medesima apertura di compasso, gli archi OGR , AGB , che si tagliano in un punto G ; per lo quale, e per lo punto dato, tirate EG ; * questa sarà la perpendicolare, che si cerca. *

DIM. Avendo tirat' i raggi HG, KG , si vedrà, come quì sopra (443), che i pun-

ti G , E sono egualmente lontani da' punti H , K della retta data CD : e che per conseguenza GE gli è perpendicolare.

445. PROBL. IV. *Dividere una retta data HK in due parti uguali HI, IK, (fig. 6.).*

SOLUZ. Con le due estremità H , K come centri, descriverò da una parte, e dall' altra con la medesim' apertura di compasso quattro archi, che si taglino ne' punti G , E , per li quali tirate EG ; questa dividerà HK in due egualmente.

DIM. Poichè si vede anche, che i punti E , G , sono egualmente lontani dall'estremità della retta data HK ; e per conseguenza (441) tutt' i punti di questa retta EG sono egualmente lontani da queste medesim' estremità; e così il punto I n'è anch' egualmente lontano

Di alcune proprietà delle linee rette per rapporto al cerchio.

446. **U** Na retta FM (fig. 2. o 7.) terminata nella circonferanza d' un cerchio, si chiama *corda* o *sottesa*; Così si dice, che l' arco EPM ha per corda, o per sottesa la retta FM . La corda IK (fig. 7.) sottende l' arco IPK , cioè è terminata dall'estremità dell' arco IPK .

447. Una porzione di cerchio racchiusa fra un' arco, e la sua corda si chiama *segmento*, e una porzione racchiusa fra un' arco, e due

raggi si chiama, *settore di cerchio*.

448. TEOR. I. *Una perpendicolare EP tirata dal centro E d'un cerchio sopra una corda FM la divide in due parti uguali.*

DIM. Poichè la linea EP parte dal centro del cerchio, ella ha un punto E, ch'è ugualmente lontano da' punti F, ed M della corda; e poichè oltreacciò ella è perpendicolare alla corda, tutti gli altri punti (441) sono ugualmente lontani da quest' estremità F, ed M. Dunque il punto I n'è ugualmente lontano: dunque $FI = IM$.

449. TEOR. II. *Reciprocamente Ogni retta EP, che passando per lo centro E d'un cerchio divide in due ugualmente una corda, è perpendicolare a questa corda.*

DIM. Poichè EP divide la corda in due ugualmente, il punto I è ugualmente distante dalle sue estremità F, M; e poichè ella passa per lo centro E, ella ha ancora un' altro punto E ugualmente distante dall' estremità F, M; dunque EP è una retta, che ha due punti I, ed E egualmente lontani da i punti F, M della corda FM: dunque (440) EP è perpendicolare ad FM.

450. TEOR. III. *Similmente se una retta EP perpendicolare su d'una corda FM, la divide in due ugualmente, ella passa per lo centro del cerchio.*

DIM. Imperochè, poichè ella divide la corda in due ugualmente, ella ha un punto I, ch'è ugualmente distante dall' estremità F, M; e poi-

e poichè ella è perpendicolare , tutt' i suoi punti passano ancora a ugual distanza dell' estremità F , M (441). Ma il centro E è uno de' punti , che passano a ugual distanza da' punti F , M (401); dunque il centro E è uno de' punti per dove passa la perpendicolare .

451. *Ipotesi.* Se si faccia girare la corda F M nel suo cerchio di maniera che le sue estremità F , M sian sempre nella circonferenza ; egli è chiaro , 1. che questa corda sottenderà sempre un arco uguale . 2. Ch' ella sarà sempre ugualmente lontana dal centro . Imperocchè in questo movimento si può concepire , che la figura FEM giri tutta intiera sul punto E , i raggi EF , EM seguendo sempre la corda ; e perciò l'angolo FEM resterà sempre lo stesso , e per conseguenza la sua misura sarà sempre un'arco uguale all'arco FPM . Si vede ancora , che la linea EI resta sempre la stessa in questo movimento . Dunque

452. *TEOR. IV.* In un medesimo cerchio , o in cercbj uguali , le corde uguali sottendono archi uguali , e le corde dissuguali sottendono archi dissuguali , e nello stesso tempo le corde uguali sono ad ugual distanza dal centro , e le corde dissuguali ne sono dissugualmente lontane . Imperciocchè una corda , che gira nel cerchio si combacerà esattamente colle corde , che le sono uguali , e non potrà giammai combaciarsi con quelle , che non le saranno uguali .

453. *TEOR. V.* In un medesimo semicerchio , o in semicerbj uguali , gli archi sono grandi , o pic-

coli, secondo che le corde sono grandi, o piccole, e che sono più vicine, o più lontane dal centro; e reciprocamente come le corde sono o grandi, o piccole, o vicine, o lontane dal centro, così gli archi sono o grandi, o piccoli.

454. TEOR. VI. Una retta EP (fig. 2) che partendo dal centro divide in due ugualmente una corda FM , divide ancora in due ugualmente l'arco FPM sotteso da questa corda, e per conseguenza l'angolo FEM misurato da quest' arco.

DIM. Imperocchè allora questa retta è perpendicolare sopra la corda FM (449), e ha tutti i suoi punti ugualmente lontani dalle sue estremità F , ed M : dunque il punto P è anche ugualmente lontano da F , ed M . Dunque tirandosi PF , PM , queste saranno due corde uguali, onde (452) l'arco $PRM = PNF$, dunque l'arco FPM , e l'angolo FEM sono divisi in due egualmente pe' l' raggio EP .

455. TEOR. VII. Una corda FM parallela a un diametro AB ; comprende fra quella, e l' diametro da una parte e dall' altra archi uguali.

DIM. Se pe' l' centro E s' innalzi sopra AB la perpendicolare EP , ella sarà ancora perpendicolare sulla corda FM (433), e per conseguenza (448) ella la dividerà in due ugualmente, e (454) farà l' arco $ANP = PRB$, e $FNP = MRP$; dunque (17) se da due archi uguali ANP , BRP si tolgano gli archi uguali FNP , MRP , resteranno gli archi uguali AF , BM .

456. COROL. I. Due parallele CD , GH (fig.)

(fig. 7. e 8) che traversano un cerchio , comprendono fra di loro da una parte , e dall' altra archi uguali FI , KM .

Imperciocchè se per lo centro E si tiri un diametro AB^* parallelo a queste rette , si ha $AF = BM$, e $AI = KB$. Dunque (fig. 7.) $AI - AF = KB - BM$, o $FI = KM$, e (fig. 8.) $AI + AF = KB + BM$, o $FI = KM$.

457. COROL. II. Se si supponga , che la retta GH (fig. 7.) si allontane dal centro E in iscorrendo parallelamente a se stessa , o alla retta CD finchè , essendo nella posizione di gh , ella non faccia altro , che toccare la circonferenza in P , o ch' ella non entri altro , che infinitamente poco nel cerchio , egli è chiaro , che si dà ancora avere $PM = PF$; poichè i punti I , K dove la retta GH divide il cerchio si approssimano a misura , che GH si allontana dal centro E , e si confondono col punto P , dove questa retta non fa più , che toccare la circonferenza.

458. Una retta , che non fa , che toccare il cerchio senza entrarvi , di qualunque maniera si prolunghi si chiama una *tangente*; e'l punto , dov' ella tocca il cerchio , si chiama *punto del contatto*.

459. TEOR. VIII. Un raggio EP tirato dal punto del contatto P è perpendicolare alla tangente gh .

DIM. Perchè la tangente gb non fa , che toccar la tangente al punto P senza entrarvi , il raggio EP misura la più picciola distanza dal centro E a questa tangente. Dunque (437) gli è perpendicolare.

460. COROL. Una retta non può toccare che in un sol punto il cerchio. Perchè dal centro E una sola perpendicolare può tirarsi sopra gb (439).

461. TEOR. IX. Reciprocamente Una retta qualunque gh perpendicolare all'estremità P d' un raggio EP , tocca il cerchio in questo sol punto P .

DIM. Poichè EP è perpendicolare sopra gb , questo raggio misura la più corta distanza dal centro E alla retta gb ; dunque tutt' i punti di questa retta sono più lontani dal centro, che P : dunque tutti questi punti sono fuori del cerchio ad eccezione del solo P .

462. COROL. I. Quindi, egli è facile tirare una tangente in un punto dato P sopra la circonferenza d' un cerchio, in faccendovi passare una retta EN menata dal centro, e in tirando dal punto P (443) la retta gb perpendicolare ad EN .

463. COROL. II. Non si può dunque menare che una sola tangente a un punto dato nella circonferenza del cerchio (422), o, ciocchè è lo stesso, se si tira una retta pe' l. punto del contatto bisogna, che o ella sia confusa con la tangente, o ch' ella entri nel cerchio. Così ella non può passare tra la tangente, e la circonferenza.

464. SCOLIO. Ma vi ci possono passare una infinità di curve, poichè l'estremità P può essere l'estremità d' infiniti raggi CE , FG , BE , DE &c., che saranno tutti perpendicolari alla tangente AE ; eccone la spiegazione.

Essendo il cerchio un poligono regolare d' infiniti

ti

ti lati infinitamente piccoli, ne segue che i cerchj son tutti poligoni d'una medesima spezie, e'l più grande sarà quello, i cui lati infinitamente piccoli saran più grandi di quelli d'un cerchio piccolo. Cid posto, quando si faccian passare tutti questi cerchj per lo punto E, sarà come se del lato infinitamente piccolo E, se ne faccia un lato comune a più cerchj, (come nella fig. 32 si vede, che del lato KEL, prolungandolo da una parte, e dall'altra, se ne fa un lato comune a più esagoni regolari), in maniera, che'l punto E (fig. 31) comune a tutti questi cerchj, è un lato infinitamente piccolo, che diviene tanto più grande, quanto il raggio del cerchio, che vi si fa passar è più grande; e che resta frattanto sempre uguale a un punto, perchè questo lato sarà sempre infinitamente piccolo, purchè il raggio non sia infinitamente grande.

465. TEOR. X. L'angolo BAD (fig. 9.) formato al punto del contatto A tra una tangente Bb, e una corda AD, è misurato per la metà dell'arco AFD sotteso dalla corda AD,

DIM. Avendo tirato per lo centro C il diametro EG parallelo alla corda AD, il diametro Ff perpendicolare a questa corda, e'l raggio CA al punto del contatto; l'angolo BAC è retto (459), come ancora l'angolo FCG, eglino anno dunque tutti due l'arco FG per misura. Ma se dall'angolo BAC se ne tolga l'angolo DAC, o il suo uguale ACG (433), rimarrà l'angolo BAD, che non è retto. Ma l'angolo ACG ha per misura

ra

ra l'arco AG; Dunque resterà l'arco FA per misura dell'angolo BAD: Ma l'arco FA è la metà dell'arco AD; dunque l'angolo BAD è misurato dalla metà dell'arco AD, &c.

E rileggendo lo stesso, ponendo b, f , in cambio di B, F , si conchiuderà, che $\frac{1}{2} AFD$ è la misura dell'angolo bAD .

466. TEOR. XI. L'angolo CAD (fig. 10) formato alla circonferenza d'un cerchio è misurato per la metà dell'arco CD compreso fra i suoi lati AC, AD .

DIM. Pe'l vertice A dell'angolo (462) tirate una tangente EB , e la somma de' tre angoli $BAC + CAD + DAE = 180^\circ$ (426) $= \frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} CD + \frac{1}{2} DA$: ma (465) l'angolo BAC è misurato da $\frac{1}{2} AC$, e l'angolo EAD da $\frac{1}{2} AD$: dunque l'angolo CAD è misurato da $\frac{1}{2} CD$.

(467. COROL. I. L'angolo DFC al centro d'un cerchio è doppio dell'angolo DAC alla circonferenza, e appoggiato sull'istess' arco.

468. COROL. II. Un'angolo retto situato nella circonferenza d'un cerchio comprende co' i suoi lati un semicerchio, ed è appoggiato su d'un diametro. Un'angolo acuto comprende meno che un semicerchio, e l'ottuso più, ed ambedue sono appoggiati su delle corde.

469. COROL. III. Tutti gli angoli descritti in un medesimo segmento, appoggiato su d'uno stesso arco sono uguali.

470. TEOR. XII. L'angolo BAD (fig. 11. 12.) formato al didentro, o al di fuori del

del cerchio ha per misura $\frac{1}{2} BD \pm \frac{1}{2} CE$, + quando è al di dentro, — quando è al di fuori,

DIM. Per E tirate ad AE la corda parallela EF: l'angolo BEF = BAD. Ma la misura dell'angolo BEF è $\frac{1}{2} BF$, $\frac{1}{2} BF = \frac{1}{2} BD \pm \frac{1}{2} DF$, e (456) $DF = CE$. Dunque $\frac{1}{2} BF = \frac{1}{2} BD \pm \frac{1}{2} CE$.

471. COROL. L'angolo bAD (fig. 12) tra la tangente Ab, e la secante AD ha per misura $\frac{1}{2} Db$ — $\frac{1}{2} bC$. Imperciocchè facendo girare AB sopra il punto A fino a ch' ella divenga tangente in b, i punti E, B si confonderanno in b.

Per l'istessa ragione l'angolo bAd compreso fra le due tangenti = $\frac{1}{2} dFb$ — $\frac{1}{2} dCb$.

472. SCOLIO. Da i tre Teoremi precedenti, e' loro Corollarj, si può didurre il Teorema generale seguente: Un angolo, la cui cima sia situata ovunque piaccia, sarà determinato, se i suoi lati, prolungati s'è necessario, taglino, o tocchino una circonferenza di cerchio in punti derminati.

473. TEOR. XIII. Se quattro corde formano un quadrilatero iscritto in un cerchio, il prodotto delle due diagonali di questo quadrilatero è uguale alla somma de' due prodotti di ciascun lato per lo lato opposto.

DIM. Fatto con BC (fig. 38) l'angolo BCF eguale all'angolo DCA; o, ciocchè è lo stesso, con CA l'angolo ACF uguale all'angolo DCB: allora a cagione degli angoli eguali ABC, CDA (469), i Triangoli DAC, BCF

BCF sono simili, dunque $DC : AD :: BC : BF = \frac{AD \times BC}{DC}$ (320). Similmente essendo l'angolo $ACF = BCD$, e $CDB = CAB$; i triangoli DBC, AFC sono simili; dunque $DC : AC :: BD : AF = \frac{BD \times AC}{DC}$. E sommando queste due uguaglianze, s'avrà $BF + AF$, ossia $AB = \frac{AD \times BC + BD \times AC}{DC}$, e perciò $DC \times AB = AD \times BC + BD \times AC$.

474. PROBLEMA I. *Dividere un'arco dato in due archi uguali.*

SOLUZ. Immaginate una corda tirata per gli estremi dell'arco; e dividedetela in due ugualmente per una perpendicolare (445), farà anche l'arco diviso in due (454) egualmente.

475. PROBL. II. *Dividere un'angolo dato in due parti uguali.*

SOLUZ. Pofate la punta del compasso sulla cima dell'angolo, e descrivete, con un'apertura qualunque, un'arco tra i due lati dell'angolo: dividete quest'arco in due parti uguali (474), e per lo vertice dell'angolo tirate una retta alla metà dell'arco; ella dividerà l'angolo in due parti uguali.

476. NOTA. *Per li due problemi precedenti si può dividere qualunque arco, o angolo in 2, 4, 8, 16, 32. &c. parti uguali, che sono i termini d'una progressione dupla; ma non si può*
di.

dividere geometricamente con la regola, e co'l compasso un' arco, o un' angolo qualunque in tre parti eguali. Questo è il famoso Problema della Trisezione dell'angolo tanto cercato dagli antichi; Ciò però s'ottiene con l'Analisi: ma di questo altrove.

477. PROBL. III. *Far passare una circonferenza d' un cerchio per tre punti dati.*

SOLUZ. Egli è chiaro, che sarebbe impossibile questo Problema, se i tre punti fossero in linea retta. * Dunque non essendo in una retta *, unite questi tre punti per mezzo di due rette: Elleno sono dunque due corde del cerchio cercato. Dividete ciascuna in due parti uguali (445) per mezzo di due perpendicolari, queste passeranno (450) pel centro del cerchio; il quale centro * dovendo essere comune a tutte due le rette *, sarà nel punto dove s'intersecano. * Dunque co'l centro preso nel punto d'intersezione, e con una delle rette, come raggio, si descriva un cerchio; questo farà quel che si cerca. *

478. PROBL. IV. *Trovare il centro d' un cerchio, o d' un' arco dato.*

SOLUZ. Si tirino due corde a piacere in questo cerchio, o quest'arco; e se ne cerchi il centro (477), come sopra: * farà fatto quel, che si vuole *.

479. PROBL. V. *Continuare un' arco d' un cerchio dato in un cerchio intero, se piace.*

SOLUZ. Se ne cerchi il centro (478), farà fatto.

Pro-

Proprietà delle linee rette, che rinchiudono uno spazio.

480. **D**EFINIZIONI. Le rette, che col loro incontro racchiudono uno spazio compongono una *figura rettilinea*. Ora l'incontro di più rette non si può fare, che per mezzo degli angoli, e però le figure rettilinee si chiamano *Poligoni*.

481. Un poligono in generale significa uno spazio racchiuso tra più rette, che si chiamano i *lati*, e che congiungendosi gli uni cogli altri per ciascuna estremità formano per conseguenza *tanti angoli quanti sono i lati*.

482. Egli è facile il concepire, che ci vogliono almeno tre rette per inchiudere uno spazio, indi è, che il più semplice de' poligoni è il *triangolo*; il secondo è il *quadrilatero*, o *tetragono*, cioè a dire una figura di 4 angoli, e 4 lati; il terzo è il *pentagono* di 5; il sesto è l'*esagono* di 6, segue l'*ettagono* di 7. l'*ottogono* di 8. l'*enneagono* di 9. il *decagono* di 10. l'*ecadecagono* di 100; il *chiliogono* di 1000; il *miriogono* di 10000. Come tutte queste figure si rapportano al triangolo, come vedrassi in appresso; e' bisogna cominciare dunque prima a ben conoscere le proprietà del triangolo.

DE' TRIANGOLI.

Delle differenti specie , e proprietà del triangolo .

483. **I**L triangolo prende differenti nomi secondo i differenti rapporti de' suoi lati , e de' suoi angoli .

Per rapporto a' suoi lati un triangolo , che ha tre lati uguali si chiama *equilatero* , come ABC (fig. 14). Quello , che ne ha due uguali , come AC , AB (fig. 15), si chiama *isofcele* . Quello , di cui tutti tre i lati son disuguali , come ABC (fig. 16), dicesi *scaleno* .

484. Per rapporto a' suoi angoli , quello , di cui tutti e tre gli angoli sono acuti dicesi *acutangolo* , come ABC (fig. 14). Quello , che ha un angolo retto come A (fig. 15) , dicesi *rettangolo* ; e quello , che ha uno ottuso , come C (fig. 16) chiamasi *Ottusangolo* .

485. In un triangolo rettangolo il lato opposto all'angolo retto dicesi *Ipotenusa* .

486. In un triangolo qualunque , il lato opposto a un angolo si chiama *base* di quest'angolo .

487. **TEOREMA I.** *Ogni triangolo si può iscrivere nel cerchio , poichè è lo stesso , che far passare un cerchio per tre punti dati (477).*

488. **TEOR. II.** *La somma de' tre angoli d' un triangolo qualunque uguaglia 180° , cioè due retti .*

Tomo II.

R

DIM.

Dim. Avendo iscritto un triangolo qualunque in un cerchio; i tre lati ne formano tre corde; e ciascun angolo ha per misura (466) la metà dell' arco, ch'è sotteso dal lato opposto; la somma de' tre angoli è dunque uguale alla metà della somma de' tre archi, cioè alla metà della circonferenza del cerchio, cioè a 180° .

489. **COR. I.** *Un triangolo non può avere che un solo angolo retto, o ottuso, e allora i rimanenti sono necessariamente acuti.*

490. **COR. II.** *In un triangolo rettangolo uno degli angoli acuti è complemento dell' altro.*

491. **COR. III.** *Se si conoscono due angoli d' un triangolo qualunque se ne può conoscere il terzo; imperocchè egli è uguale alla differenza tra 180° e la somma de' due angoli retti conosciuti; se se ne conosce uno, il suo supplemento è uguale alla somma degli altri due.*

492. **TEOR. III.** *In un triangolo qualunque ABC (fig. 14) se si prolunghi un lato qualunque CB , l'angolo esteriore ABI è uguale a' due interiori, e opposti ACB , CAB .*

Dim. La somma dell' angolo esteriore ABI , e del suo interiore contiguo ABC uguaglia. 180° (425); ma (488) la somma de' due angoli ACB , CAB , e dell' angolo ABC è ancora 180° . Dunque l'angolo esteriore ABI è uguale alla somma de' due interiori opposti, ACB , CAB .

493. **TEOR. IV.** *Se da un punto qualunque D preso al di dentro d' un triangolo CAB*
(fig.

(fig. 15), si tirino le rette DA , DB sull' estremità d' un lato qualunque AB , l' angolo ADB compreso fra queste rette è maggiore dell' angolo BCA opposto al lato AB .

DIM. Imperocchè avendo iscritto il triangolo ABC in un cerchio, la misura dell' angolo ACB è la metà dell' arco sotteso dalla corda AB (466), quandocchè la misura dell' angolo BDA è quest' istessa metà, più la metà dell' arco compreso fra'l prolungamento de' lati BD , AD (470).

494. TEOR. V. In qualsivis triangolo la somma di due lati qualunque è maggiore del terzo.

DIM. La retta AB (fig. 16) è 'l più (392) corto camino per andare da A in B . Dunque se si andasse da A in B in passando per C , o non si camminerebbe il camino più corto; o allora si descriverebbero i due lati AC , CB : dunque la somma di due lati AC , CB è maggiore del terzo lato AB .

495. TEOR. VI. In un triangolo qualunque il più gran lato è opposto al più gran angolo: è 'l più piccolo lato al più piccol' angolo, e viceversa il più gran angolo è opposto al più gran lato, e l' angolo più piccolo al più piccolo lato.

Poichè avendo iscritto il triangolo in un cerchio, il più gran angolo è misurato dal più grand' arco, (453) e 'l più grand' arco è sotteso dalla più gran corda, e reciprocamente.

496. COR. Se si supponga, che l' angolo d' un triangolo s' apra più e più mentre, che i due lati, che formano quest' angolo restano sempre uguali, il terzo lato opposto all' angolo, che cre-

* *ſce, crefcerà ancorà più e più; e reciprocamente diminuirà, ſe l'angolo oppoſto diminuiſce.*

497. TEOR. VII. *Una perpendicolare tirata da un angolo d'un triangolo qualunque ſopra la baſe cade al di dentro del triangolo, ſe i due altri angoli ſono acuti; cade poi al di fuori, o ſia ſopra la baſe prolungata, ſe uno de' due angoli è ottuſo.*

DIM. Io dico 1°. che nel triangolo GEK la perpendicolare EI cade tra G, e K, ſe i due angoli KGE, EKG ſono acuti.

Imperocchè ſ'ella cadeſſe al di fuori, cioè ſi ſuppoſeſſe, che EL foſſe la perpendicolare; Allora il triangolo EKL avrebbe un'angolo retto ELK, e un angolo ottuſo EKL (poichè il ſupplemento d'un'angolo acuto è un'angolo ottuſo) ciò ch'è impoſſibile (489). Dunque la perpendicolare tirata dall'angolo GEK non può cadere altrove, che tra G, e K.

Io dico 2°. Che ſe uno degli angoli del triangolo FEH è ottuſo, la perpendicolare EI cade al di là ſopra la baſe prolungata. Imperocchè ſe ſupponghiamo che EG fuſſe queſta perpendicolare; allora nel triangolo EGH ſi avrebbe un'angolo retto HGE, e un ottuſo EHG, ciocch'è impoſſibile. Dunque ella non può cadere, che dal lato del ſupplemento dell'angolo ottuſo, cioè verſo I.

498. TEOR. VIII. *In un triangolo equilatero tutti tre gli angoli ſono uguali, e ciaſcuno di 60°. e reciprocamente ſe tutti e tre gli angoli d'un triangolo ſono uguali, o due ſono di 60°, quel-*

quello è equilatero . Poichè avendo iscritto il triangolo in un cerchio , i tre lati uguali sono tre corde uguali ; e per conseguenza sottendono tre archi eguali , i quali misurano tre angoli uguali , e de' quali ciascuno è il terzo di 180 gradi , &c.

499. TEOR. IX. *In un triangolo isoscele gli angoli opposti a' lati uguali sono uguali : e reciprocamente , se due angoli d' un triangolo sono eguali , il triangolo è isoscele . Imperocchè avendo similmente iscritto in un cerchio un triangolo ; gli angoli eguali intercettano archi eguali , e gli archi eguali sono sottesi da corde uguali (452).*

500. COR. *Se dall' angolo E , (fig. 2) formato da i lati EG , EL uguali , del triangolo isoscele EGL , si abbassi sopra il lato opposto GL la perpendicolare EI , ella dividerà questo lato in due parti uguali GI , IL , a cagione delle inclinazioni uguali de' due lati uguali GE , LE (436).*

501. TEOR. X. *Ogni triangolo è circoscrittibile al cerchio .*

DIM. *Se si dividano in due ugualmente due angoli B , A d' un triangolo qualunque ABC (fig. 15) , i due lati BD , AD che li dividono s' incontreranno in un punto D . Ora io dico , che se dal punto D si abbozzino su de' tre lati le perpendicolari DG , DF , DE , elleno saranno uguali fra loro , e per conseguenza possono essere i raggi d' un medesimo cerchio , che tocchi i tre lati a' punti G , F , E . (461).*

Imperocchè i triangoli rettangoli GBD , BDE

R 3

sono

sono uguali, essendo l'angolo in *B* uguale in ciascuno, e'l lato comune *BD*, dunque $GD = DE$; per la stessa ragione i triangoli rettangoli uguali *DEA*, *DFA* danno $DE = FD$. Dunque $GG = DE = DF$.

502. COR. Le tre rette, che dividono in due ugualmente i tre angoli d'un triangolo vanno ad incontrarsi in uno stesso punto nel triangolo. Imperocchè egli è chiaro, che se si divide l'angolo *E* in due ugualmente per una retta, ella va ad incontrare il punto *D*.

Della comparazione de' triangoli.

503. **L**E figure si comparano fra loro o considerando la posizione de' lati, o la grandezza degli angoli, o gli spazj compresi. Sia della prima.

Si chiamano *triangoli uguali* fra loro quelli, di cui tutti gli angoli, e tutt'i lati sono uguali fra loro.

504. Si chiamano *triangoli simili equiangoli* quelli, di cui tutti gli angoli solamente sono uguali ciascuno a ciascuno. Così i triangoli *ABC*, *DEF* (fig. 16) sono simili, perchè l'angolo $A = E$, e l'angolo $B = D$, e l'angolo $C = F$.

505. Quando si paragonano figure fra loro, si chiamano parti *omologhe* quelle, che sono della stessa denominazione di grandezza in ciascuno.

scuna figura. In due triangoli simili per esempio, il più gran lato si chiama omologo del più gran lato dell'altro, il minimo omologo del minimo, il mezzano del mezzano.

506. TEOR. I. *Due triangoli, che anno i lati omologhi uguali sono uguali fra di loro.*

DIM. Io dico, che se $AB = ab$, $AC = ac$, $BC = bc$ (fig. 13) farà il triangolo $ABC = abc$. Co' punti A , e B come centri descrivete gli archi FEG , DCE , che si dividono al vertice C . Applicate dipoi il triangolo abc sul triangolo ABC , mettendo prima il punto a sopra il punto A , essendo $AB = ab$, il punto b cadrà sopra B : ed essendo $ac = AC$, qualche parte della retta ac terminerà nell'arco FCG . Similmente essendo $bc = BC$ la linea bc cadrà in qualche punto dell'arco DCE , ma perchè ac , bc si congiungono in c , elleno cadranno ambedue nel punto C dell'intersezione de' due archi: dunque ac combacerà AC , bc BC , onde tutto il triangolo abc , ABC ; e però saranno uguali.

507. TEOR. II. *Due triangoli simili sono uguali fra di loro, se anno un lato omologo uguale, e tutti gli angoli d'uno uguali a tutti gli angoli dell'altro.*

DIM. Se l'angolo $A = a$, $B = b$, $C = c$, e $AB = ab$, farà il triangolo $ABC = abc$.

Ponetè il lato ab sopra AB mettendo il punto a sopra A , b sopra B ; è chiaro, ch'essendo l'angolo $a = A$, $b = B$, cadrà ac sopra AC , bc sopra BC ; dunque cadrà il punto c

sopra C ; onde tutto il triangolo *abc* combaciando con ABC gli è uguale.

508. TEOR. III. *Se due triangoli anno due lati omologhi uguali , e gli angoli compresi fra essi ancora uguali , sono uguali fra di loro .*

DIM. Se il lato $AC = ac$, e $AB = ab$, e se l'angolo $A = a$: sarà il triangolo $ABC = abc$. Applicate *ab* sopra *AB*, *ac* sopra *AC*; essendo gli angoli uguali *A*, e *a*, questi lati cadranno esattamente gli uni sopra gli altri; e perchè $AC = ac$, e $AB = ab$, il punto *c* cadrà sopra *C*, e'l punto *b* sopra *B*, dunque *bc*, che misura la distanza de' punti *b*, *c*, sarà uguale, e cadrà ancora sopra *BC*, che misura la distanza de' punti *B*, e *C*. Dunque il Δ *abc* combacerà con *ABC*, onde $abc = ABC$.

509. TEOR. IV. *Se di due triangoli simili, e ineguali si posi un'angolo sopra un'angolo uguale dell'altro, e'lati, che comprendono quest'angolo del primo sù i lati, che comprendono quest'angolo dell'altro, sarà il terzo lato del 1°. parallelo al terzo del 2°.*

DIM. Se si ponga l'angolo *D* (fig. 16) sopra l'angolo uguale *B*, il lato *DF*, sopra il suo omologo *BC*, e'l lato *DE* sopra il suo omologo *BA*, il lato *FE*, o se sarà parallelo al lato *AC*; imperocchè, poichè i triangoli sono simili, l'angolo $\angle FDE = \angle CAB$, dunque (434) *fe* è parallela ad *AC*. Se si fosse posto l'angolo *F* sopra il suo uguale *C*, *DE* sarebbe stata parallela ad *AB*; e così del terzo.

510. TEOR. V. E reciprocamente. Se per un punto *f* preso a piacere sopra il lato d' un triangolo, si tiri una retta *fe*, parallela alla sua base *AC*, i triangoli *Bfe*, *BAC* sono simili, accagione degli angoli uguali *Bfe*, *BCA*, e *Bef*, *BAC* (433).

Degli altri Poligoni.

511. **V**I sono tre specie di poligoni, irregolari, simmetrici, e regolari.

I poligoni irregolari sono quelli, che anno i lati, e gli angoli dissuguali fra loro (fig. 20. 22. 23.).

512. I poligoni *simmetrici* sono quelli, che sono composti di lati paralleli, e uguali (18. 19. 21. 24. 25. 27.). Onde segue necessariamente, che anno un numero pari di lati.

513. I poligoni regolari sono quelli, che anno i lati, e angoli uguali, (26. 27. 28.)

514. Un quadrilatero irregolare si chiama *Trapezio* (fig. 20): un regolare *quadrato*, un Simmetrico *Parallelogrammo*. Questo, se tutti gli angoli sono retti, dicesi *parallelogrammo rettangolo*, o *rettangolo* (21) semplicemente; se i suoi angoli non sono retti, ma due de' suoi lati contigui sono uguali, dicesi *Rombo* (fig. 19), ma se due lati son dissuguali dicesi *Romboide* (fig. 17).

515. Si chiama angolo *convesso* quello, il cui

Ma vi sono tanti triangoli quanti sono i lati (513). Dunque la somma degli angoli del poligono è tante volte 180° , quanti sono i lati tolto 360° .

Così se un poligono ha 7 lati per esempio, la somma di tutti gli angoli è $= 180^\circ \times \frac{7-2}{1} = 900^\circ$.

519. TEOR. III. *La somma di tutt' i supplementi degli angoli d' un poligono qualunque, che non ha angoli concavi, è 360° .*

DIM. Imperocchè ciascun' angolo (425) più il suo supplemento $= 180^\circ$, dunque la somma di tutti gli angoli del poligono più il suo supplemento, è tante volte 180° quanti vi sono lati; ma (518) la somma di tutti gli angoli d' un poligono è tante volte 180° quanti vi sono lati, meno 360° : dunque la somma di tutt' i supplementi è 360° .

520. TEOR. IV. *Se un poligono ha degli angoli concavi, la somma di tutt' i supplementi di tutti gli angoli è $= 360^\circ +$ tante volte 180° , quanti sono gli angoli concavi.*

DIM. Imperocchè egli è chiaro (fig. 22) che la somma de' supplementi degli angoli convessi del poligono ABDEF è 360° (519); ma se in questo poligono si fa un angolo concavo DCB, allora l'angolo GDB supplemento dell'angolo EDB s' aumenta dell'angolo BDG; l'angolo DBI supplemento dell'angolo ABD s' aumenta dell'angolo CDB. Ora gli angoli (488) CDB, CBD insieme coll'angolo concavo DCB $= 180^\circ$. Dunque quando si

fa

fa un angolo concavo in un poligono, si aumentano i supplementi de' due angoli convessi vicini d'una quantità, che congiunta all'angolo concavo è $= 180^\circ$. Dunque &c.

521. SCOLIO. Si può ancora ridurre un poligono in tanti triangoli quanti sono i lati meno due, con tirare le diagonali, che (fig. 22) non si segano, e così più facile, e generalmente si deduce ciò, che s'è detto al numero (518).

Proprietà de' Poligoni simmetrici.

522. TEOR. I. *Se da ciascun angolo d'un poligono simmetrico si tirino le diagonali agli angoli opposti . . .*

I. *I due triangoli opposti al vertice, e formati per le diagonali vicine, sono uguali; così (fig. 17. 24. 25.)* $BGG = FGE$. Imperocchè poichè per la natura de' poligoni simmetrici i lati opposti sono paralleli, e uguali, FE è uguale e parallela a BC , l'angolo $BCG = GFE$ (433); e $CBG = GEF$; dunque (507) i triangoli BGC , FGE sono uguali: e così degli altri.

523. II. *Tutte queste diagonali dividonsi in uno stesso punto. Imperocchè tutt' i triangoli opposti, ch' elleno formano sono eguali.*

524. III. *Tutte queste diagonali dividonsi reciprocamente in due parti uguali. Imperocchè poi-*

poichè le diagonali BE , AD si tagliano scambievolmente in due parti eguali, il punto di mezzo della diagonale BE dè essere il medesimo, che 'l punto di mezzo della diagonale AD : Per la medesima ragione il punto di mezzo della diagonale è il medesimo, che 'l punto di mezzo della diagonale FC , &c.. Dunque il punto di mezzo di tutte le diagonali è un solo, e istesso punto.

525. TEOR. II. *Una diagonale tirata da un angolo all' altro opposto, divide un poligono simmetrico in due figure uguali, e simili. Imperocchè da un lato vi sono tanti triangoli uguali, simili, e similmente posti, quanti ne sono dall' altro lato.*

526. Si può chiamare dunque il punto dove si segan le diagonali del poligono simmetrico il centro del poligono, accagione dell' uguaglianza de' raggi, che terminano agli angoli opposti.

527. TEOR. III. *Una retta qualunque IH , (fig. 17. 24. 25.) che passa per lo centro G d' un poligono simmetrico, è divisa in due ugualmente, e divide il poligono in due figure uguali e simili; ciocchè si dimostra come sopra (522. 525.) per l' uguaglianza de' triangoli BIG , HGE .*

528. TEOR. IV. *Due rette qualunque, che passano per lo centro d' un poligono simmetrico si dividono scambievolmente in due parti uguali; e questo è chiaro per la proposizione precedente.*

529. La reciproca: se due rette qualunque si tagliano in due ugualmente in un poligono
sim-

simmetrico, elle vi si tagliano nel centro, non è generalmente vera; poichè se nel poligono simmetrico ABCD (fig. 18) si prenda CE = BE, e si tirino CF, EB; elleno si taglieranno in due egualmente in G, perchè i triangoli GEC, GFP (507) sono uguali; e frattanto il punto G è lontano dal centro H.

Proprietà de' poligoni regolari.

530. **T** EOR. I. *Ogni poligono regolare è iscrivibile in un cerchio, cioè a dire si può far passare la circonferenza del cerchio per tutt' i suoi angoli. (fig. 26. 27).*

DIM. Basta dimostrare, che tutte le rette CA, CB, CD tirate dal centro C agli angoli, sono uguali fra di loro. Dunque si dividano in due ugualmente tutti gli angoli del poligono per le rette AC, DC, EC &c.; Io dico, ch' elleno si tagliano tutte nel medesimo punto C, e ch' elleno saranno tutte uguali fra di loro, Imperocchè le rette BC, AC incontrandos' in un punto qualunque C, fanno un triangolo ABC; E le rette BC, DC incontrandosi in un punto C fanno un altro triangolo BCD. Or io dico, che questi due triangoli sono eguali fra di loro: Poichè essendo tutti gli angoli d' un poligono regolare uguali fra di loro, e per costruzione si sono divisi tutti ugualmente in due, gli angoli CAB,

CAB, CBA sono uguali fra di loro, e agli angoli CBD, CDB, e $AB = BD$: dunque (507) il triangolo ABC è = BCD. Dunque $AC = DC = BC$; E avendo il lato comune BC, il punto C dell' intersezione delle linee AC, BC sarà l' istesso, che quello della intersezione di BC, DC. E così degli altri.

531. COR. I. I raggi d' un poligono regolare lo dividono in tanti triangoli isosceli, e uguali, quanti sono i lati.

532. COR. II. Ciascun lato del poligono regolare iscritto al cerchio, è la corda d' un' arco uguale al quoziente di 360° diviso per lo numero de' lati. Così il lato d' un decagono, è la corda d' un' arco di 36° .

533. COR. III. Il lato dell' esagono regolare è uguale al raggio del cerchio nel qual è iscritto. Imperocchè se per lo centro C dell' esagono, (fig. 27) si divida questo in sei triangoli uguali, si conoscerà facilmente, che questi triangoli sono equilateri accagione de' raggi uguali CA, CB, e dell' angolo ACB di 60° ; ciò che fa, che ciascun' angolo CAB, ABC è anche di 60° (498); dunque $CA = AB$.

534. SCOLIO. Indi applicando un raggio alla circonferenza s' ha l' arco di 60° , di 30° dividendo quello per due, e di 15 anche suddividendo per due. Non si può poi con la geometria ordinaria dividere per 3, per 5, per 15 (476).

535. TEOR. II. Ogni poligono regolare è
cir.

circofcrivibile al cerchio ; cioè a dire *fi può de-
scrivere dentro d'un poligono regolare un cerchio,
che tocca tutt' i suoi lati per mezzo.*

Imperocchè essendo tutt' i lati d' un poligono regolare ifcritto al cerchio come tante corde uguali (532), faranno ad ugual diftanza dal centro (452); Se dunque fi tirano dal centro le perpendicolari fova i lati , quefte divideranno per metà detti lati (448), e faranno uguali . Dunque fi potrà far paffare un cerchio per tutte le loro eftremità , il quale toccherà tutt' i lati (462) del poligono per mezzo (fig. 28).

536. TEOR. III. *Ogni poligono regolare , il numero de' lati del qual' è pari , è un poligono fimmetrico.*

DIM. Avendo ridotto un poligono regolare in triangoli per mezzo de' raggi tirati dal centro agli angoli , fi concepirà , ch' effendo uguali quefti triangoli , e' l numero de' lati pari , la metà del numero di quefti triangoli farà fe- parata dall' altra metà per un diametro come AE (fig. 27), il qual' è formato da due di quefti raggi oppofti AC , CE . Or a cagione de' triangoli uguali ABC , ECF , gli angoli FEC , CAB fono uguali ; dunque (434) i lati FE , AB fono paralleli , e uguali .

537. PROBL. I *Circofcrivere un cerchio a un dato poligono regolare .*

SOLUZ. Se ne cerchi il centro (530), il refto farà facile .

538. PROBL. II. *Ifcrivere un cerchia in un poligono regolare .* So-

SOLUZ. Avendo trovato il centro del poligono (530); da questo si tiri sopra un lato la perpendicolare; questa sarà il raggio del cerchio (535).

539. **PROBL. III.** *Iscrivere in un cerchio dato un poligono regolare qualunque.*

SOLUZ. GENER. Dividasi 360° per lo numero de' lati del poligono, che si cerca; si prenda su' l' cerchio dato un' arco eguale al quoziente: la corda di quest' arco (532) sarà uno de' lati del poligono. Questa corda si meni intorno per la circonferenza; si farà il poligono regolare, che si cerca.

Per esempio, per iscrivere un pentagono regolare, fate $\frac{360}{5} = 72$; si prenda con un' istromento esatto un' arco di 72° . su' l' cerchio dato, si tiri la sua corda per tutta la circonferenza.

540. **OSSER.** Questa soluzione non è geometrica interamente; ma è quella, che si segue nella pratica.

Non si può iscrivere nel cerchio per mezzo della Geometria Elementare, che il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono, il pentadecagono, e tutt' i poligoni regolari, che anno un numero di lati in progressione geometrica dupla, de' quali questi qui sono i primi: Così il triangolo equilatero dà i poligoni regolari di 6, 12, 24, 48, &c. lati. Il quadrato, quei di 8, 16, 32, 64, &c. lati. Il pentagono, quei di 10, 20, 40, 80, &c. lati. Il pentadecagono, quei di 30, 60, 120,

240, &c. lati. Gli altri poligoni, come l'Ettagono, l'Enneagono, l'Endecagono, &c. non possono descriversi geometricamente, che co' costruir equazioni proprie per ciascheduna, ma che sono elevatissime.

541. PROBL. IV. *Circoscrivere un poligono regolare qualunque a un cerchio dato.*

SOLUZ. GENER. Si divida 360° per lo doppio del numero de' lati del poligono, che si cerca, e avendo preso (fig. 28) un'arco FG uguale al quoziente; si tirino per le sue estremità F, G, un raggio CF, e una retta indeterminata CB; s'innalzi sulla estremità F del raggio una perpendicolare AFB, che incontrerà CB nel punto B; si porti FB in FA, e la linea AB sarà uno de' lati del poligono, che si cerca. Si ponno cercare anche gli altri lati; ovvero co' l' raggio CR si può descrivere un cerchio BAHED, e portare in giro per tutta la circonferenza la corda AB, vi s'iscriverà il poligono BAHED, che sarà nel medesimo tempo circoscritto al cerchio dato.

DIM. Poichè egli è facil cosa vedere, che per la costruzione si formano tante tangenti uguali, e divise in due ugualmente per lo punto del contatto, quanti sono i lati del poligono, che si domanda.

Proprietà del Cerchio.

542. **TEOR. I.** *Un cerchio è un poligono regolare d' un numero infinito di lati infinitamente piccoli.*

DIM. Quanti più lati ha il poligono regolare, tanto più viene a confonderli col cerchio, nel qual'è iscritto, o circoscritto. Dunque se avesse realmente un'infinità di lati, sarebbe interamente confuso col cerchio; e si potrebbe prendere indistintamente il cerchio per lo poligono.

543. Sia il cerchio DEB (fig. 29), di cui un diametro GB sia prolungato al di fuori in A, come si vorrà; si supponga, che la retta AB, girando sulla sua estremità fissa A, descriva da una parte, e dall'altra con la sua estremità B gli archi BNO, BML, di maniera, ch'ella passi sopra tutto lo spazio, che racchiude il cerchio dato DEB.

Ciò posto, egli è chiaro, che questa retta AB diventando tanti raggi, quanti vi sono punti negli archi BO, BL, tutti questi raggi saranno dissugualmente divisi tanto per la parte concava DYIBKZE, che per la parte convessa DSQE: onde in generale

544. **TEOR. II.** *Di tutte le rette come AB, AI, AY, AD, AK, AZ, AE, che partendo da un punto A preso fuori del cerchio termina-*

no alla circonferenza concava

1°. La massima è quella, che passa per lo centro come AB.

2°. Delle altre quella è maggiore, che più sta vicin' al centro, e quelle, che ne stanno ad ugual distanza, sono uguali.

3°. Le più corte sono le tangenti AD, AE.

4°. Due sole rette possono essere uguali. Al contrario, si conchiuderà generalmente

545. TEOR. III. Che di tutte le rette AD, AS, AH, AG, AF, AQ, AE, che partendo da un punto A preso fuori terminano alla parte convessa

1°. La più corta è quella, che prolungata, passerebbe pel centro.

2°. Quelle, che più da questa si scostano sono più lunghe, e quelle, che ne sono ad ugual distanza, sono uguali.

3°. Le più lunghe sono le due, che toccano il cerchio.

4°. Infine, non vi possono essere più di due rette uguali. Ciò che si dimostra così. Tirate dal centro C de' raggi a tutt' i punti della circonferenza, dove queste rette terminano: onde per dimostrare il teorema II°. Tutte le rette AB, AI, AY si considerano come terzi lati d' un triangolo, i quali devono decrescere (gli altri due lati restando costanti) a proporzione, che l'angolo opposto decresce (496); così si può riguardare ACB come un triangolo, i cui lati siano AC, CB, AB: l'angolo ACB è infinitamente ottuso, e gli angoli CAB, CBA

CBA infinitamente acuti ; dunque AB è il più gran lato possibile , che possa congiungere l'estremità de' due lati costanti CA , CB . Indi nel triangolo ACI poichè i lati AC , CI sono uguali à' lati AC , CB del Δ ACB ; è l'angolo ACI minore dell'angolo ACB ; farà il lato AI minore di AB . In fine se $IB = BK$, farà $AI = AK$ a cagione de' triangoli uguali ACI , ACK . Similmente per dimostrare il Teor. III^o , si considereranno le rette AH , AG , AS , &c. , come terzi lati de' triangoli ACG , ACH , ACS , &c. , che deggiono essere (496) tanto più grandi , (gli altri rimanendo costanti , o eguali) quanto più grandi diventano gli angoli opposti . Così la retta ACG essendo considerata come un triangolo , il cui angolo ACG è infinitamente piccolo , il lato opposto AG sarà il più piccolo , che possa unire l'estremità de' lati costanti CA , CG ; ma nel triangolo ACH , ove i lati AC , CH sono uguali ai lati AC , CG del triangolo ACG , l'angolo compreso ACH è maggiore dell'angolo ACG : dunque il lato AH dè esser maggiore del lato AG . Si prova anche , che 'l lato AF = AH , s'essi passano ad ugual distanza del centro C , cioè a dire , se l'angolo ACF = ACG , &c.

546. Se sopra un punto qualunque A (fig. 30) preso in un cerchio GOBLG , e che sia altro , che il centro C , si faccia girare una retta indeterminata ACB , ella farà sempre divisa inegualmente per tutt' i punti della cir-

conferenza di questo cerchio. Onde in generale

TEOR. IV. Di tutte le rette tirate da un punto preso al didentro del cerchio, altro che il centro, fino alla circonferenza....

1°. La più gran retta è quella, che passa per lo centro, come AB.

2°. Delle altre, quella è più corta, che più s' allontana dal centro, di maniera, che quelle, che ne sono ugualmente distanti, sono uguali.

3°. La più corta è quella, ch' è diametralmente opposta al centro, come AG.

4°. Le due uguali fra loro essendo prolungate diventano corde uguali. La dimostrazione n' è la stessa, che al numero 545.

547. COR. Se tre linee tirate da un punto preso in un cerchio fino alla circonferenza sono uguali, quel punto è il centro.

548. TEOR. V. Due cerchj non si segano in più di due punti.

DIM. Perchè se si segassero in tre punti: tirate dal centro di uno tre rette a' punti dell' intersezione, queste, come raggi d' uno stesso cerchio, faranno uguali, onde da uno stesso punto, che non è il centro, alla circonferenza si tirano tre rette uguali, locchè è impossibile (544).

549. COR. I. Due cerchj, che anno tre punti comuni, anno un' istesso centro, e si confondono.

550. COR. II. Due cerchj, che non anno, che uno, o due punti comuni, sono eccentrici, cioè, non anno un medesimo centro.

551. TEOR. VI. *Due corde, che si dividono in un cerchio in un punto differente dal centro, non si ponno dividere in due ugualmente.*

DIM. Se fusse vero, una retta tirata dal centro alla comune sezione sarebbe perpendicolare ad ambedue queste corde, che si taglierebbero egualmente, perchè le dividerebbe per metà (449), locchè è impossibile (439).

552. COR. *Dunque se due corde si dividono ugualmente in due dentro un cerchio, si dividono nel centro, onde sono diametri.*

553. TEOR. VII. *Se due cerchi si toccano, la retta che congiunge i loro centri passa ancora pe' l punto del contatto.*

DIM. Imperocchè 1. Se si toccano (fig. 29) al di fuori, il più corto cammino per andare da A al centro C si è il passare pel punto del contatto G; perchè allora questo cammino è $= AG + GC$, quando che non passando per G, bisogna descrivere, oltre i due raggi, lo spazio compreso fra due cerchi.

2. Se si toccano al di dentro (fig. 30); Il più corto cammino per andare da A in G, dev'essere la più corta linea, che si possa tirare da questo centro al gran cerchio GLBOG: ora (546) la più corta linea, che si possa tirare da un punto diverso dal centro alla circonferenza dè esser nella direzione del centro; dunque la linea GA, che passa per lo centro A del cerchio piccolo, e per lo punto del contatto G, è anche nella direzione del centro C, del cerchio grande GLBO.

554. **PROBL. II.** *Da un punto, preso fuori del cerchio tirare a questo una tangente.*

SOLUZ. Sia dato il punto A (fig. 33), d'onde sà d'uopo tirare la tangente al cerchio dato EBH; si tiri dal punto A al centro la retta AC, e sopra di questa come diametro, si descriva un semicerchio AEC, e per lo punto E, ove il semicerchio taglia il cerchio dato, si tiri la retta AEL; questa sarà la tangente, che si cerca.

DIM. Perchè se si tira il raggio CE, si conoscerà (468), che l'angolo AEC è retto, e che per conseguenza AE è una retta perpendicolare all'estremità del raggio CE, e che così ella è tangente del cerchio (462).

OSSER. Egli è facile il vedere, che questo problema ha due soluzioni; poichè s'avrebbe potuto descrivere il semicerchio CEA dalla parte H, e in conseguenza tirar da quella via la tangente.

Delle linee proporzionali.

555. **POTESI.** Se si dividono due rette qualunque AB, AC (fig. 34), che fanno un'angolo qualunque BAC, per un numero qualunque di parallele DH, EI, FK, GL, &c., egualmente le une distanti dalle altre

1.^a *Tutte le parti AH, HI, IK, KL &c., della*

della linea AC, faranno uguali fra di loro, come le parti AB, DE, EF, &c. dell'altra linea AB; Perchè se da ciascuno de' punti della sezione delle parallele con le rette AB, AC si tirino le perpendicolari AU, DM, EN, &c; AU, HQ, IR, &c: egli è facile il vedere, che i triangoli rettangoli ADU, DEM, &c, sono uguali fra di loro, essendo (507) le perpendicolari DM, EN uguali fra loro, e gli angoli ADU, DEM uguali. Così dall'altra parte; dunque &c.

2°. Un numero qualunque di parti d' AC sarà al numero delle parti di AB comprese fra le stesse parallele, come un altro numero di parti di AC, al numero delle parti di AB contenute fra le stesse parallele.

Imperocchè poichè da una parte $AD = DE = EF$, &c. e dall'altra $AH = HI = IK$ &c. egli è chiaro, che $AD : DE = AH : HI$, perchè il quoziente è 1°. nell'una, e l'altra ragione. Dunque $AD : AH = DE : HI$ (304). Similmente $DE : EF = HI : IK$: o $DE : HI = EF : IK$. Dunque $AD : AH = DE : HI = EF : IK$, e si può dire anche $= FG : KL = GB : LC$. Onde segue (310) che AB somma di tutti gli antecedenti è ad AC, somma di tutti i conseguenti, come AD ad AH, o come una parte qualunque di AB alla parte corrispondente di AC, o (297) come tante parti, che si vogliano in AB allo stesso numero di parti in AC. Ora questo numero di parti è determinato dall'intervallo fra queste parallele; Dunque &c.

556. TEOR. I. FONDAMENTALE. *I triangoli simili anno i lati omologhi proporzionali fra di loro.*

DIM. Poichè (509) due triangoli simili posti uno sopra l'altro, anno i loro terzi lati paralleli, se si supponga tutto lo spazio del triangolo ABC (fig. 16) riempito di rette infinitamente prossime, e parallele ad AC, i lati BA, AC si troveranno nel caso delle rette AB, AC della fig. 34; ed se sarà una di queste parallele: si avrà dunque $BA : BC = Be : Bf$, o sostituendo $AB : BC = DE : DF$, o (304) $BA : DE = BC : DF$, e così degli altri lati.

557. SCOLIO. Egli è evidente ancora, che (555) le parti Ae, Cf sono proporzionali a' lati BA, BC; o $Ae : Cf = BA : CB = DE : DF$.

558. TEOR. II. *Due triangoli, che anno i lati omologhi proporzionali, sono simili, ed equiangoli.*

DIM. (Fig. 16) Se $AC : BC = FE : FD$; ed $AC : AB = FE : ED$, faranno i triangoli ABC, DEF equiangoli. Imperocchè se sopra EF si costruisca un triangolo equiangolo al triangolo ABG, facendo l'angolo $GEF = BAC$, s' avrà (556) $AC : BC = FE : FG$; ma $AC : BC = FE : FD$; dunque $FE : FG = FE : FD$. Dunque (306) $FD = FG$, e così degli altri lati; ma per costruzione il triangolo FEG è equiangolo al triangolo ABC. Dunque il triangolo FED anche gli è equiangolo.

559.

559. TEOR. III. *Due triangoli , che anno due lati omologhi proporzionali intorno d' un angolo uguale , sono equiangoli .*

DIM. Se ne' triangoli ABC, DEF l'angolo $D = B$, e se $DE : DF = BA : BC$: io dico , che questi triangoli sono equiangoli .

Prendete sopra BA la parte $Be = DE$, e tirate ad AC la parallela ef ; i triangoli ABC, eBf sono equiangoli , poichè la parallela ef rende l'angolo $feB = A$, $efB = C$; dunque (556) $Be : Bf = BA : BC$; ma per ipòtesi è $DE : DF = BA : BC$; dunque $Be : Bf = DE : DF$; ma $Be = DE$, dunque (306) $Bf = DF$; dunque (508) i due triangoli Bef , DEF sono equiangoli , e simili : Ma Bef è equiangolo ad ABC ; dunque DEF è equiangolo ad ABC .

560. TEOR. IV. *Una retta AD , che divide in due ugualmente un angolo BAC (fig. 37) d' un triangolo , divide il suo lato opposto BC in due parti BD , DC proporzionali a' lati AB , AC : cioè , che $BD : DC = AB : AC$.*

DIM. Prolungate indefinitamente AC , e per B tirate BE parallela ad AD : i triangoli BCE , DAC saran simili (510) : onde (557) $BD : DC = AE : AC$; ma per le parallele l'angolo $BEA = DAC = DAB = ABE$ dunque (499) il triangolo BAE è isoscele ; dunque $AE = AB$: dunque sostituendo , sarà $BD : DC :: AB : AC$.

561. TEOR. V. *Se dall' angolo retto E (fig. 35) d' un triangolo rettangolo CEL , s' abbassì sull'*

sull'ipotenusa CL una perpendicolare EO; I°. Ella si dividerà in due triangoli rettangoli COE, OEL simili fra loro, ed a CEL. II°. Sarà mezza proporzionale fra i segmenti CO, OL dell'ipotenusa. III°. Ciascun lato del triangolo CEL sarà mezzo proporzionale fra l'ipotenusa CL, e'l segmento contiguo a questo lato.

DIM. Primieramente egli è chiaro, che i triangoli COE, OEL sono simili al triangolo CEL, perchè oltre un'angolo retto, essi anno co'l triangolo CEL un'angolo di comune, d'onde segue, ch'essi sono anche simili fra di loro; e perciò

Nel triangolo CEO, il lato piccolo CO è al lato medio EO, come nel triangolo EOL il lato piccolo EO è al medio LO, ovvero $\div \text{CO} : \text{EO} : \text{LO}$.

Nel triangolo CEO il lato piccolo CO è alla sua ipotenusa EC, come nel triangolo CEL il lato piccolo EC è alla ipotenusa LC; ovvero $\div \text{CO} : \text{CE} : \text{CL}$.

Nel triangolo EOL, il lato medio LO è alla sua ipotenusa EL, come nel triangolo CEL il lato medio EL è alla ipotenusa LC; ovvero $\div \text{LO} : \text{LE} : \text{LC}$.

562. COROL. I. La somma de' quadrati di due lati del triangolo rettangolo è uguale al quadrato dell'ipotenusa. Imperocchè essendo $\div \text{CO} : \text{CE} : \text{CL}$, si ha (316) $\text{CE}^2 = \text{CO} \times \text{CL}$ e $\div \text{OL} : \text{LE} : \text{CL}$; si ha $\text{LE}^2 = \text{OL} \times \text{CL}$. Dunque $\text{CE}^2 + \text{LE}^2 = \text{CO} \times \text{CL} + \text{OL} \times \text{CL} = (\text{CO} + \text{OL}) \times \text{CL} = \text{CL} \times \text{CL} = \text{CL}^2$.

563. COR. II. Poichè $CE^2 + LE^2 = CL^2$, farà (217) $CE^2 = CL^2 - LE^2$, ed $LE^2 = CL^2 - CE^2$, cioè, che 'l quadrato d'un lato qualunque d'un triangolo rettangolo è uguale all' eccello del quadrato dell' ipotenusa sovra il quadrato dell' altro lato.

564. COROL. III. La diagonale d'un quadrato è incommensurabile per rapporto al lato. Imperocchè allora essa è l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, di cui i lati sono eguali; dunque il quadrato di quello sarà uguale a due quadrati uguali; lo che non si può esprimere con numeri (183).

565. TEOR. VI. La perpendicolare EO (fig. 41) tirata dalla circonferenza d'un cerchio sopra un diametro CL, è mezza proporzionale tra le parti CO, OL di questo diametro. O' ciocchè è lo stesso il suo quadrato è uguale al prodotto di CO X OL.

Imperocchè se dal punto E si tirino all'estremità di questo diametro le rette EC, EL, si conoscerà (468), che 'l triangolo CEL è rettangolo in E; donde segue (561) che $\div$ CO : EO : OL; o (316) $EO^2 = CO \times OL$.

566. TEOR. VII. Le parti di due corde BA, DC, (fig. 38) che si dividono in un cerchio, sono reciprocamente proporzionali.

DIM. Se si tirino DA, CB, si conoscerà, che i triangoli BEC, DAE sono simili, a causa degli angoli uguali in E, dell'angolo C uguale all'angolo A, per essere ambedue appoggiati sopra uno
stessa

stesso arco BD, e dell'angolo B appoggiato sull'arco AC uguale all'angolo D appoggiato sullo stesso arco, dunque $AE : DE = CE : BE$.

567. TEOR. VIII. Se due linee EB, EC, partendo da un' istesso punto fuori del cerchio vanno a terminarsi nella sua circonferenza concava, le loro parti esteriori EA, ED, sono reciprocamente proporzionali alle suddette rette intere EB, EC, cioè a dire, che $EA : ED = EC : EB$.

DIM. Se si tirino le corde AC, DB, si vedrà facilmente, che i triangoli EBD, EAC sono simili, avendo l'angolo E comune, e l'angolo B appoggiato sullo stesso arco AB, come l'angolo C; dunque (556) $EA : ED = EC : EB$.

568. TEOR. IX. Se di due linee EB, Ed, (fig. 39) che partano dal punto E dato fuori del cerchio, l'una EB entra al di dentro, e l'altra Ed è tangente; questa tangente è mezza proporzionale tra l'altra linea intera EB, e la sua parte esteriore EA, cioè $\div EB : Ed : EA$.

DIM. Imperocchè se si tirino dB, dA, si vedrà, che i triangoli EdB, EdA sono simili, avendo un'angolo E comune, e l'angolo $EBd = AdE$, essendo misurati ambidue per la metà dell'arco Ad (466, 465) dunque l'angolo $dAB = EdB$; dunque (556) $EB : Ed = Ed : EA$.

569. TEOR. X. Le parti di due rette, che sono divise fra due parallele sono proporzionali fra loro.

DIM. I triangoli ABE, CED sono simili, (fig.

(fig. 40) a causa degli angoli in E uguali (426), e dell'angolo $EAB = EDC$ (433), e dell'angolo $EBA = ECD$; dunque (556) $EA : ED = EB : EC$.

570. PROBL. I. *Ritrovare dopo tre rette EA, EB, ED (fig. 40) una quarta proporzionale.*

SOLUZ. Si tirino due rette indefinite AD, BC, che si tagliano in un'angolo qualunque. Nel punto E d'intersezione segnate le rette EA, EB, ED: per l'estremità A, e B delle due prime rette date si tiri AB, e per l'estremità D della terza si tiri ad AB la parallela DH, la quale taglierà BC, in maniera, che EC farà la retta, che si cerca. * Poichè le rette AD, BC tagliandosi fra due parallele, si taglieranno proporzionalmente (569). *

571. PROBL. II. *Ritrovare fra due rette CO, OL, (fig. 41) una mezza proporzionale.*

SOLUZ. Unite in linea retta le due date CO, OL, e con la loro metà FC, come raggio, descrivete un semicerchio CEL: indi per lo punto O, ove si congiungono le rette date, innalzate la perpendicolare OE; questa farà mezza proporzionale fra CE, e OL. * Poichè la perpendicolare tirata dalla circonferenza al diametro è mezza proporzionale fra i segmenti del diametro (505). *

572. PROBL. III. *Ritrovare dopo due rette date una terza proporzionale.*

SOLUZ. Questo problema si scioglie come il primo, supponendo, che la seconda, e terza delle

delle date nel 1.^o problema quì siano eguali. *
Poichè sieno le due rette date (fig. 40) AE, EB, si supponga la terza ED uguale alla BE, e siano queste disposte come nel 1.^o problema; allora si perfezioni la figura, come sopra; sarà la CE quarta proporzionale dopo AE, EB, ED; ed essendosi supposte BE, ED eguali, sarà terza continua proporzionale dopo AE, EB. *

573. PROBL. IV. *Dividete una retta data AC (fig. 41) nella stessa ragione, ch'è stata divisa un'altra AB.*

SOLUZ. Si faccia con queste due rette un'angolo qualunque BAC, e avendo unite le loro estremità per mezzo della retta BC; alla BC tirate per tutt'i punti di divisione di AB le parallele Gg, Ff, &c. ed essendo i triangoli ABC, AGg, AFf &c. simili, la linea AC avrà (557) tutte le sue parti proporzionali a quelle della linea AB.

574. PROBL. V. *Dividere una retta data in due parti tali, che la più grande sia mezza proporzionale fra la tutta, e l'altra parte.*

SOLUZ. Sia data AB, s'innalzi sulla sua estremità (fig. 42 B) la perpendicolare AE uguale alla metà di AB, e co'l punto E, e'l raggio EA avendo descritto un cerchio DAF, si tiri per B, ed E la retta BF; e co'l punto B, e'l raggio BD, si tiri l'arco CD; questo taglierà AB come si cerca, cioè sarà $\div$ AB: BC: AC.

DIM. Poichè AB è tangente, s'avrà (568)
BF: BA :: BA: BD; dunque BF — BA:

BA

BA :: BA — BD : BD ; Ma BF — BA =
 BD = BC ; poichè FD è uguale a BA , essendo
 doppia di EA metà di AB ; dunque anche BA
 — BD = AC ; dunque sostituendo , sarà BC :
 BA :: AC : BC ; ovvero $\div$ BA : BC : AC .

La soluzione di questo Problema si chiama divi-
 dere una retta in estrema , e mezza ragione .
 Si chiama anche la sezione divina per le meravi-
 gliose proprietà , che se le sono attribuite .

Della comparazione delle figure .

575. **D**ue figure qualunque sono simili quan-
 do , avendo un numero uguale di lati,
 tutt' i lati di una siano a tutt' i lati dell' altra pro-
 porzionali , ciascuno al suo lato omologo ; e tutti
 gli angoli dell' una , compresi fra questi lati omo-
 loghi , uguali a tutti gli angoli dell' altra ciascuno
 a ciascuno . Onde segue ;

I°. Che tutt' i poligoni regolari della stessa spe-
 cie , e per conseguenza i cerchj , sono figure simili ;
 e similmente tutti gli archi , che anno un' ugual
 numero di gradi . * II. Che due figure simili non
 differiscono , che nella grandezza . *

576. TEOR. I. Di qualunque maniera due
 figure simili si dividano in triangoli per le diago-
 nali , che dividono gli angoli omologhi , i triangoli
 omologhi sono simili . (fig. 43. 44.) .

DIM. Se i due poligoni ABCDE , FGHK
 sono tali , che l'angolo A = F , B = G ,

Tomo II.

T

G =

$C = H$, $D = I$, $E = K$, e se $AB : FG = BC : GH = CD : HI = DE : IK = EA : KF$; io dico 1°. che, se si tirino le diagonali AC , AD , FH , FI , i triangoli ABC , FGH saranno simili; come ancora i triangoli ACD , FHI ; ed ADE , FIK .

Imperocchè, poichè l'angolo $B = C$, e poichè essi sono compresi fra lati proporzionali, egli è chiaro (558), che i triangoli ABC , FGH sono simili; e per la stessa ragione sono anche simili i triangoli ADE , FIK . Ciò posto, l'angolo $BAC = GFH$, e l'angolo $DAE = IFK$; dunque l'angolo $BAE = BAC = DAE = CAD = GFK = GFH = IFK = HFI$; dunque l'angolo $CAD = FHI$; e per la stessa ragione l'angolo $ACD = FHI$, e l'angolo $ADC = FIH$; dunque i triangoli ACD , FHI sono ancora equiangoli.

577. TEOR. II. Reciprocamente: *Due figure qualunque sono simili, qualora si possono ridurre in altrettanti triangoli equiangoli.*

Dim. Imperocchè gli angoli uguali de' triangoli equiangoli rendono uguali gli angoli omologhi di ciascuna figura; e i lati di ciascuna figura essendo ancora lati di triangoli equiangoli, sono proporzionali (556), dunque le figure sono simili (575).

578. TEOR. III. *Se in due poligoni simili si tirino linee qualunque della stessa maniera, cioè a dire, che dividono i lati omologhi, o gli angoli omologhi nella stessa ragione, io dico 1°, queste linee sono proporzionali fra loro, ed ai lati omologhi*

loghi qualunque di questi poligoni. 2°. Le dividono in due parti, di cui le omologhe sono porzioni simili d'essi poligoni.

DIM. Per esempio, 1°. avendo diviso BC (fig. 43. 44.) in L, e'l suo omologo GH in M nella stessa ragione, cioè a dire, che $BC:GH = LC:MH$: Se si tirino indi due rette ad arbitrio LN, MO, che facciano gli angoli CLN, HMO qualunque uguali nello stesso modo, o che dividono i lati omologhi ED, KI nella stessa ragione, di maniera che $ED:KI = DN:IO$; io dico, che $LN:MO = CD:HI = BC:GH$ &c.

Imperocchè se si tirino NC, OH, si conoscerà, che i triangoli NCD, OHI sono simili (559), avendo gli angoli uguali D, I compresi fra' lati proporzionali ND, DC; OI, IH; dunque (555) $CD:HI = CN:HO$, e l'angolo DGN = IHO. Se dunque questi angoli DCN, IHO uguali si tolgono dagli angoli uguali DCL, IHM, resteranno gli angoli uguali NCL, OHM; dunque anche i triangoli (558) NCL, OHM sono simili; Dunque $LN:MO = LC:MH = BC:GH = CD:HI$ &c.

2°. Similmente se si tirino ancora due altre rette in queste due figure; si proverà della stessa maniera, ch'elleno sono tra loro come due lati omologhi qualunque, e per conseguenza, ch'elleno sono ancora proporzionali alle linee LN, MO.

3°. Infine, egli è evidente, che le linee

T 2

LN,

LN, MO dividono le due figure in quattro; di cui le omologhe ABLNE, FGMOK sono figure simili, e nello stesso tempo porzioni simili de' due poligoni; poichè i loro angoli omologhi sono uguali, i loro lati omologhi sono proporzionali, e che così elleno non differiscono fra loro se non in quanto che l'una è più grande dell'altra a proporzione, che l'uno de' poligoni è più grande dell'altro. L'istesso è riguardo alle porzioni LNDC, MOIH.

579. Io chiamerò *dimensioni omologhe* due linee, come LN, MO, tirate nella stessa maniera nelle due figure simili; così due lati omologhi di due figure simili, i raggi di due cerchj, i loro diametri, e similmente due corde, che sottendono un'ugual numero di gradi &c., sono dimensioni omologhe: e la proprietà generale delle figure simili è, che abbiano tutte le loro dimensioni omologhe proporzionali.

SEZIONE SECONDA

DELLE SUPERFICIE.

Del Contorno delle Superficie; e della loro Comparazione.

580. **A** Ssioma, ovvero Teor. I. Il contorno, o perimetro d'una figura qualunque è uguale alla somma di tutt' i suoi lati.

581. TEOR. II. I Perimetri delle figure simili sono fra loro come un lato, o come una dimensione omologa qualunque in ciascuna figura.

DIM. Il perimetro della prima figura è a quello della seconda, come la somma de' lati della prima è alla somma de' lati della seconda; e poichè le figure si sono supposte simili, elleno anno (575) tutt' i loro lati proporzionali, di maniera, che i lati della prima sono gli antecedenti, e i lati della seconda i conseguenti: or la somma degli antecedenti è alla somma de' loro conseguenti, come un' antecedente qualunque è al suo conseguente (330); dunque il perimetro della prima figura è a quello della seconda, come un lato qualunque della prima è a un lato qualunque omologo della seconda, o (578) come una dimensio-

ne qualunque della prima è alla dimensione omologa della seconda.

582. COROL. I. *Le circonferenze de' cerchj, o le lunghezze di due archi d' un' ugual numero di gradi in cerchj diseguali sono fra di loro, come i raggi di questi cerchj, o come i loro diametri, o infine come due corde, che sottendono in ciascun cerchio, o in ciascun arco un' ugual numero di gradi.*

Imperocchè (575) i cerchj, o gli archi d' un' ugual numero di gradi, sono figure simili, e i raggi, i diametri, &c., sono loro dimensioni omologhe (579).

Delle misure proprie a determinar la grandezza delle superficie.

583. **S**I chiama *sopraffaccia*, *area*, o *superficie* d' una figura, la quantità, ch' esprime lo spazio rinchiuso fra' lati della figura.

584. Una superficie è una estensione nella quale si considerano due dimensioni per volta (387). La misura precisa di ciascuna di queste dimensioni in particolare è la linea retta, ma essa non può essere la misura della superficie: Così non si avrebbe l' idea della superficie d' un terreno, se si dicesse solamente, che ha 100 piedi di lunghezza: ma se si aggiunge, ch' ella ha in tutto 20 piedi di larghezza, subito se ne concepisce tutta l' estensione, supposto, che si sappia qual' è la lunghezza assoluta

ta d'un piede; ma indipendentemente da questa conoscenza, si avrebbe una idea chiara della figura di questo terreno, come un parallelogrammo, la cui lunghezza sia quintupla della larghezza.

585. Le misure delle superficie devono essere superficie, siccome le misure delle linee sono altre linee. Se si vuol misurare una superficie in piedi, o in pertiche, bisogna impiegare superficie ciascuna d'un piede, o d'una pertica. Or non si conosce naturalmente un piede in superficie, che in imaginando uno spazio (e per conseguenza una figura terminata da' lati), che abbia pur un piede di lunghezza, e un piede di larghezza: questa lunghezza dè esser misurata (438) per una perpendicolare, che congiunge i due lati, che determinano la lunghezza della figura; e la larghezza dè esser misurata per una perpendicolare, che determina la larghezza; dunque lo spazio d'un piede di superficie dè essere una figura quadrata, di cui ciascun lato è d'un piede. L'istesso è delle altre specie di figure.

586. Donde si può conchiudere in generale, che il quadrato è la misura comune delle superficie. Così per disegnare la grandezza della superficie d'una figura qualunque, si dice, ch'ella è di tanti pollici, piedi &c. quadrati, ciò, che significa, che si può coprire tutto lo spazio, che vi è rinchiuso per tanti quadrati d'un pollice, d'un piede, &c.

587. Egli è facile il vedere, che'l nume-

ro delle parti d'una misura in superficie è uguale al quadrato delle parti della stessa misura in lunghezza, o in larghezza: Per esempio, che un piede quadrato dè contenere 144 quadrati ciascuno d'un pollice: Che una pertica dè contenere 36. quadrati d'un piede per ciascheduno. Imperocchè un piede quadrato contiene 12 volte 12 piedi quadrati, perchè ciascun pollice in altezza risponde a 12 pollici in lunghezza &c.

Del metodo generale di misurar le superficie.

588. **S**E si supponga, che la linea AB (fig. 19. e 21.) si muova parallela a se stessa fino a che sia venuta in DC, si conosce, ch'ella avrà coverta tutta la superficie del parallelogrammo ABCD, poichè a ciascun passo, ch'ell'avrà fatto, ell'avrà coverta una parte della superficie uguale alla sua lunghezza AB: dunque la superficie intera è uguale a questa lunghezza AB presa tante volte, quanti sono i passi, ch'ella ha fatto per venire da AB in CD. Or questo numero di passi è misurato pe'l numero de' punti della retta, che misura la distanza delle due parallele AB, CD, la quale retta dè essere una perpendicolare (438) tirata da un punto qualunque di DC sopra AB (prolungata s'egli è necessario), com'è EF, o DG: dunque la superficie del parallelo.

logrammo ABCD è uguale al numero de' punti di AB presa tante volte, quanti sono i punti, che si contengono in EF; ovvero, ciò ch'è la stessa cosa, ella è uguale al prodotto della linea AB moltiplicata per la linea EF.

589. La perpendicolare EF, o DG, che misura la distanza fra due lati paralleli, si chiama l'altezza del parallelogrammo, e un di suoi lati si chiama la base. Dunque

590. TEOR. I. *La superficie d'un parallelogrammo qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

591. OSSER. Ciascuna delle tracce della retta AB (la cui somma uguaglia la superficie del parallelogrammo ABCD) è realmente un piccolo parallelogrammo, che ha per larghezza l'estensione di ciascun passo di AB: ma comechè questa estensione è infinitamente piccola si può confondere ciascuna traccia colla linea AB, e dire in generale *la superficie d'una figura è uguale alla somma di tutte le linee parallele, che si possono tirare in questa figura*

592. TEOR. II. *La superficie d'un triangolo qualunque è uguale alla metà del prodotto d'un de' suoi lati qualunque moltiplicati per la perpendicolare tirata dall'angolo opposto su questo lato (prolungato se sia d'uopo).*

Imperocchè un parallelogrammo è diviso per la diagonale in due triangoli uguali, onde si può riguardare il triangolo, come la metà d'un parallelogrammo, la cui altezza è la perpendicolare abbassata da un'angolo su'l lato opposto.

Que-

Questo Teorema può essere dimostrato indipendentemente dal parallelogrammo in questa maniera :

La superficie d'un triangolo qualunque ABC (fig. 34) è uguale alla somma di tutte le linee parallele BC, GL, FK, &c., che si possono tirare dalla base BC fino alla sua sommità; or tutte queste parallele mancano in progressione arimmetica, cioè a dire, elleno an sempre una stessa differenza; poichè GL differisce da BC della $BP + TC$, e FK differisce da GL, di $GO + SL$, &c.. Ma tutte queste differenze sono eguali fra di loro, poichè tutt'i piccoli triangoli GBP, FGO, &c. sono eguali fra di loro (555), come anche i triangoli LTC, KSL, &c. dunque $BP + TC = GO + SL$. Si possono considerare adunque tutte queste parallele, che riempiono la superficie del triangolo, come una serie di quantità in progressione arimmetica, di cui la perpendicolare AX esprime il numero, BC è l'ultimo termine, e A, ch'è una parallela infinitamente piccola, il primo termine. E la somma (280) è uguale a $\overline{BC} + A \times \frac{1}{2} AX$: ovvero, poichè A è una linea infinitamente piccola, la somma di tutte queste parallele è uguale a $BC \times \frac{1}{2} AX$, ovvero alla metà del prodotto di BC in AX.

593. COROLLARIO. *Un numero qualunque di triangoli, e di parallelogrammi, che sono tra due parallele, e che anno una stessa base, o basi uguali, anno ugual superficie:* Perchè anno anche la

la stessa altezza, ch'è la distanza di queste due parallele.

594. TEOR. III. *Le superficie di triangoli qualunque sono in ragion composta delle loro basi, e altezze.*

DIM. Le superficie de' triangoli sono la metà del prodotto delle loro basi per le loro altezze: or le metà son fra loro come i tutti (297): Dunque le superficie de' triangoli sono come i prodotti delle loro basi per le loro altezze. Ma (290) una ragion de' prodotti è una ragion composta delle sue radici: dunque le superficie de' triangoli sono in ragion composta delle loro basi, e altezze.

595. COROLL. *Le superficie di due triangoli dissuguali, che anno basi uguali, sono tra loro come le loro altezze; e quelle, che anno altezze uguali, sono come le basi.*

DIM. Imperocchè allora le superficie sono fra loro, come il punto d'una stessa quantità moltiplicata per due quantità dissuguali. Dunque (296) elleno sono fra loro come queste quantità dissuguali.

TEOR. IV. *Se le altezze di due triangoli sono in ragione inversa delle loro basi, le superficie sono uguali.*

DIM. Imperocchè allora l'altezza del primo essendo all'altezza del secondo, come la base del secondo alla base del primo; il prodotto dell'altezza del primo per la sua base, è uguale al prodotto dell'altezza del secondo per la sua base (300).

597. TEOR. V. Reciprocamente ; se due triangoli , che non sono simili anno superficie uguali , le loro dimensioni sono in ragione inversa .

DIM. Imperocchè allora le dimensioni del primo triangolo fanno un prodotto uguale alle dimensioni del secondo . Dunque (302) le dimensioni d' uno di questi triangoli fanno gli estremi d' una proporzione , le dimensioni dell' altro fanno i mezzi : per esempio l' altezza del primo triangolo è all' altezza del secondo , come la base del secondo è alla base del primo . Dunque queste dimensioni sono in ragione inversa .

598. TEOR. VI. Le superficie di due triangoli simili sono fra loro in ragion duplicata , o come i quadrati d' una delle loro dimensioni omologhe presa in ciascuno .

DIM. Poichè le figure simili (579) anno le dimensioni omologhe proporzionali , le superficie di due triangoli simili sono fra loro come due prodotti di due quantità proporzionali : or (291) una ragion di prodotti di due quantità proporzionali è una ragion duplicata ; dunque le superficie di due triangoli simili sono fra loro in ragion duplicata d' una dimensione omologa qualunque presa in ciascuno , o come (298) il quadrato d' un lato qualunque , per esempio , al quadrato del lato omologo .

599. TEOR. VII. La superficie d' una figura qualunque è uguale alla superficie di tutt' i triangoli ne' quali è stata ridotta .

600. TEOR. VIII. *Per aver la superficie d'un poligono irregolare, bisogna dividerlo in triangoli, prendere la superficie di ciascuno (592); la somma di tutte queste superficie sarà uguale a quella del poligono.*

601. TEOR. IX. *La superficie d'un poligono regolare è uguale al prodotto della perpendicolare tirata dal centro sopra un de' lati, moltiplicata per la metà del suo contorno.*

DIM. Poichè tutt'i triangoli, a' quali si riduce un poligono regolare per li raggi, sono uguali fra loro (531), e anno per conseguenza una stess' altezza uguale a CI, (fig. 26.).

La superficie del poligono regolare è uguale a $CI \times \frac{1}{2} AB + CI \times \frac{1}{2} BD + CI \times \frac{1}{2} DE + CI \times \frac{1}{2} EF + CI \times \frac{1}{2} FG + CI \times \frac{1}{2} GH + CI \times \frac{1}{2} HA$; Or (222) tutto questo prodotto è uguale a CI moltiplicata per $\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} BD + \frac{1}{2} DE + \frac{1}{2} EF + \frac{1}{2} FG + \frac{1}{2} GH + \frac{1}{2} HA$; cioè a dire per la metà del contorno del poligono; dunque &c.

602. COROL. I. *La superficie d'un cerchio è uguale al prodotto del suo raggio moltiplicato per $\frac{1}{2}$ della circonferenza.*

603. COR. II. *La superficie d'un cerchio è uguale a quella d'un quadrato, il cui lato sia mezzo proporzionale geometrico fra il raggio di questo cerchio, e una linea della stessa lunghezza della semicirconferenza (316).*

604. COR. III. *La superficie d'un settore del cerchio è uguale al prodotto del raggio di questo*

sto

sto cerchio per una linea retta uguale alla metà della lunghezza dell' arco , che termina questo settore . Imperocchè la superficie d' un settore del cerchio è una porzione del poligono regolare , com' è qui rappresentato per HCDBAH (fig. 26) : or egli è chiaro , che la superficie di questa porzion' è uguale al prodotto di CI per la metà del perimetro HABD .

605. TEOR. X. Un poligono qualunque ABCDE si può ridurre in un triangolo AEG d' una ugual superficie (fig. 36) .

DIM. Tirate una diagonale BD , che ne tolga il triangolo DBC . Per lo suo vertice C tirate a questa diagonale la parallela CF terminata al lato AB , prolungato s' è necessario : congiungete DF , e avrete un poligono AFDE uguale in superficie al poligono proposto , e che avrà un angolo di meno . Imperocchè se da' triangoli DBC , DBF uguali in superficie (593) si tolga il triangolo comune DBH , resterà il triangolo DHC uguale in superficie al triangolo BHF . Or per costruzione il triangolo DHC è escluso dal nuovo poligono , e 'l triangolo BHF vi è entrato ; dunque questo poligono è ancora uguale in superficie al poligono proposto . Operando della stessa maniera si può ridurre il nuovo poligono AFDE in un' altro della stessa superficie , e che abbia un' angolo di meno ; e così successivamente fino a tanto , ch' ei sia ridotto in un triangolo .

606. COROLL. Di qui , e da' problemi precedenti segue , che la superficie d' una figura qualunque

lunque o è uguale a un sol prodotto di due dimensioni, o può esservi ridotta.

607. TEOR. XI. *Le superficie di due figure simili sono fra loro in ragion duplicata, o come i quadrati d'una delle loro dimensioni omologhe presa in ciascuna.*

DIM. Poichè (578) i triangoli omologhi a' quali si sono ridotti due poligoni simili, sono porzioni simili di queste figure, egli è chiaro, che le superficie di questi due poligoni sono fra loro, come quella d'uno de' triangoli qualunque preso nell'uno è a quella del triangolo omologo preso nell'altro. Or (598) le superficie di questi triangoli sono in ragion duplicata d'una delle loro dimensioni omologhe qualunque prese in ciascuna, e (579) queste dimensioni omologhe sono proporzionali a tutte quelle de' due poligoni; dunque le superficie de' due poligoni sono fra loro in ragion duplicata, o come i quadrati d'una delle loro dimensioni omologhe qualunque presa in ciascuna.

608. COROLL. I. *Le superficie de' cerchi sono fra loro come i quadrati de' loro diametri, o de' loro raggi.*

609. COROLL. II. Quando dunque si vuol le aumentare, o diminuire la superficie d'un poligono, conservandone la figura, bisogna fare questa proporzione per trovarne ciascun lato.

Come la superficie del poligono dato è alla superficie del poligono cercato, così il quadrato d'un de' lati del poligono dato è al quadrato del lato
omg.

omologo del poligono cercato. O pure avendo trovato un de' lati per questa proporzione, si avrà ciascun' altro lato per quest' altra proporzione. Come il lato del poligono dato è al suo lato omologo trovata: così ciascun' altro lato del poligono dato è a ciascun lato omologo del poligono cercato.

Si vuol, per esempio, fare un parallelogrammo, la cui superficie sia dupla, tripla, quadrupla &c. o sia come 3 a 1 per rapporto a quella del parallelogrammo B, il cui lato maggiore è 6 piedi, il minore 4 piedi. Si farà dunque come $1 : 3 :: 36$ (quadrato di 6 piedi): a 108 quadrato del gran lato del parallelogrammo A, la radice è 10, 392 piedi; indi come 6 a 10, 392, così 4 a 6, 928, che sarà il lato minore del parallelogrammo A; Ei bisogna dunque dare 10 piedi, 4 pollici, 8 linee al lato maggiore, e 6 piedi, 11 pollici, 1 linea $\frac{1}{2}$ al lato minore, per aver il parallelogrammo A triplo in superficie per rapporto al parallelogrammo B.

610. TEOR. XII. Se avendo presa una dimensione omologa in tre poligoni simili, queste tre dimensioni si trovino tali, che disposte in triangolo, questo triangolo sia rettangolo: La superficie del poligono, la cui dimensione sarà l'ipotenusa di questo triangolo, sarà uguale alla somma delle superficie de' due altri poligoni: e la superficie d'uno de' due poligoni, la cui dimensione sarà un de' lati del triangolo, sarà uguale alla differenza tra la superficie del poligono, la cui dimensione sarà

farà l'ipotenusa, e la superficie dell' altro poligono.

D.M. Le superficie di questi tre poligoni sono fra loro come i quadrati di questi tre lati del triangolo rettangolo: Or il quadrato dell'ipotenusa è uguale (562) alla somma de' quadrati de' due lati del triangolo, e'l quadrato di un de' lati è uguale alla differenza fra il quadrato dell'ipotenusa, e'l quadrato dell' altro lato; dunque l' istesso è per le superficie de' tre poligoni.

611. SCOLIO. Indi si deduce un metodo facile di costruire geometricamente poligoni, che siano la somma, o la differenza di due altri poligoni dati simili. Per averne la somma bisogna disporre ad angolo retto uno de' lati dell' uno co' l' lato omologo dell' altro, tirar l'ipotenusa, e farne il lato omologo del poligono cercato. Per avere un poligono uguale alla differenza fra due altri; sopra un lato qualunque del maggiore, come diametro, descrivete un semicerchio: situate il lato omologo del più piccolo in maniera, che una delle sue estremità cada sopra un' estremità del diametro, e che l' altra estremità sia in qualche punto della circonferenza. Da questo punto tirate all' altra estremità del diametro una retta, questa sarà il lato omologo del poligono cercato.

Osservazioni sulla quadratura del cerchio .

612. **Q**uantunque per le proposizioni precedenti si conosca in qual rapporto le circonferenze , e le superficie di due cerchi siano co' loro raggi , o co' loro diametri , intanto non si è potuto ancora finora determinar precisamente il rapporto ; ch'è fra il diametro d'un cerchio , e la sua circonferenza ; di maniera che la grandezza d'un diametro essendo data in numeri , non si può assegnare in numeri precisamente la grandezza della sua circonferenza , nè in conseguenza quella della sua superficie , ch'è (602) il prodotto del semidiametro per la semicirconferenza . E questo è quello , che si dà intendere , quando si dice , che non s' è ancora trovata *la quadratura del cerchio* (questa parola *quadratura* viene da ciò , che il quadrato è (586) la comune misura di ogni superficie).

613. Tutti gli sforzi de' più gran Matematici si sono ridotti a dimostrare , ch'è impossibile trovarla per certe vie , ma ch'è facile approssimarglisi all' infinito ; e l'aggiustatezza per la quale se gli è approssimato è più che sufficiente , per l'applicazion della Geometria alla pratica la più scrupolosa , di maniera che gli abili geometri non riguardano al presente la quadratura assoluta del cerchio ,
che

30,

che come una cosa di mera curiosità, e amano meglio impiegare il loro tempo a ricerche più utili, tanto più, ch'egli è certissimo, che se'l rapporto del diametro del cerchio alla sua circonferenza può esser espressa in numeri, questi numeri devono essere sì grandi, che non se ne potrebbe far uso ne' calcoli, e bisognerebbe sempre nella pratica appigliarsi a' numeri, de' quali ci serviamo attualmente. Ma la maggior parte di coloro, che non anno, che una conoscenza superficialissima delle matematiche, intraprendono con confidenza la soluzione di questo famoso problema, senza nemmeno intendere troppo bene lo stato della questione, e non mancano di persuadersi, che l'an trovata.

614. *Si sono trovati metodi per quadrare assolutamente certi spazj racchiusi tra porzioni di cerchio, o tra porzioni di cerchio, e linee rette. Per esempio, un antico Greco, chiamato Ippocrate di Chio ha trovato, che se sopra l'ipotenusa, e sopra i lati d'un triangolo rettangolo si descrivano semicerchi, (come nella fig. 45) si avranno due spazj curvilinei AECGA, CFBHC, la somma delle superficie de' quali sarà uguale a quella del triangolo rettangolo ACB. Si chiamano questi due spazj, le Lunule d' Ippocrate.*

DIM. Poichè (608) le superficie de' cerchi sono tra loro come i quadrati de' loro diametri, le somme delle loro superficie sono fra loro come le somme de' quadrati de' loro diametri : or (562)

309

determinata di 113 a 355. Questi sono i due più piccoli numeri, che danno il rapporto più prossimo al vero.

616. Così il diametro d'un cerchio essendo dato, per calcolare la sua circonferenza bisogna fare questa regola di proporzione; come 113 a 355, così il diametro del cerchio dato è alla sua circonferenza; e se si vuol sapere la superficie di questo cerchio, bisogna (602) moltiplicar la metà di questo diametro per la metà della circonferenza così trovata.

Proprietà delle superficie Piane, o de' Piani.

NOi abbiamo fin qui supposto, che tutte le linee, e le figure fossero posate sopra d'un piano, e che gli spazj, ch'esse rinchiudono, fossero descritti da' movimenti di punti, o di linee sopra d'un piano, del quale se n'è domandata la possibilità (395): or si viene a mostrarne l'origine, e la formazione geometrica.

617. IPOTESI. Concepite una retta AB posta in aria, alla quale sia perpendicolare un'altra indefinita ED (fig. 46); e inoltre, che la retta AB giri sopra di se medesima senza muoversi dal suo luogo, e voi vedrete ad evidenza, che la retta ED descriverà una superficie piana CGCDDD; questa superficie
V 3 farà

farà un piano perpendicolare alla linea AB.

Il piano è dunque una superficie tale, che tutt' i punti d' una retta posatale sopra, e girata in tutte le maniere, la tocchino sempre.

618. Se le due linee non fossero perpendicolari l'una all'altra, la figura descritta non farebbe un piano. Per esempio, se si fa girare sopra di se medesima la retta MN (fig. 54) a cui è fissata la retta MB, che fa in M l'angolo acuto NMB; ei si vede facilmente, che questa retta MB descriverà una superficie rotonda convessa nella punta d'un lato, e concava al di dentro, sulla quale per conseguenza ei non farà possibile di situar retto in maniera, che tutt' i punti della quale tocchino questa superficie.

619. TEOR. I. *D' una retta situata sopra d' un piano non può esserne una parte sì questo piano, e l' altra elevata al di sopra, o al di sotto.*

620. COR. I. *Se due punti d' una retta sono in un piano, tutta la retta intera sarà nel medesimo piano.*

621. COR. II. *Un medesimo piano A non può essere in parte situato sopra un piano B, e in parte elevato all' in sù, o abbassato all' in giù. Poichè allora una retta situata su' l' piano A potrebb' essere in parte su' l' piano B, e in parte o elevata, o abbassata; locchè è impossibile.*

622. TEOR. II. *Tre punti, che non sono in linea retta, determinano la posizione d' un piano.*

DI M.

DIM. Se si posi un piano sopra quanti punti si vogliano in linea retta, si concepisce facilmente, che tutti questi punti formeranno un'appoggio, intorno a cui potrà il piano girare liberamente. Ma se 'l piano si posi sopra tre punti, che non sono in linea retta, questi tre punti formeranno un'appoggio su 'l quale il piano non potrà più girare, ma che 'l riterrà in una posizione costante, dunque tre punti, che non sono in linea retta determinano la posizione d' un piano.

623. **COROLL.** *Un triangolo determina un piano, e la sua posizione.*

624. **TEOR. III.** *Una retta perpendicolare a un piano, è perpendicolare anche a tutte le rette, che si tirano nel medesimo piano per l'estremità della retta data. Così AE è perpendicolare a tutte le rette CED, CED, &c. (fig. 46.).*

625. **TEOR. IV.** *Due rette perpendicolari o egualmente inclinate nella medesima maniera sopra d' un piano, sono parallele fra di loro; e reciprocamente.*

626. **TEOR. V.** *Due rette, che s'intersecano sono tutte in un medesimo piano; o, cioè, ch'è lo stesso, si può disporre un piano in maniera, che vi giacciono due rette, che s'intersecano.*

DIM. Poichè il punto d'intersezione, e un'altro punto preso a piacere in ciascheduna, sono tre punti, che non sono in linea retta: ma questi tre punti (622.) determinano

no la situazione d'un piano, su 'l quale ciascuna di queste due linee ha due punti: Dunque (620) queste due linee sono tutte intere in questo piano.

627. TEOR. VI. *Se due rette, che sono in un piano, sono tagliate da una terza, fuori del loro punto di comune sezione; questa retta, che le taglia è anche nel medesimo piano.* Poichè ella ha due de' suoi punti in questo piano, cioè i suoi due punti d'intersezione con le due rette.

628. TEOR. VII. *Tre punti non ponno essere comuni a due piani differenti, se non sono in linea retta.*

DIM. Tre punti, che non sono in linea retta, determinano la posizione d'un piano (622). Ma se tre punti non in linea retta potessero esser comuni a due piani differenti, sarebbe una parte della superficie rinchiusa fra questi tre punti comune a ciascun de' due piani: Dunque uno di questi due piani avrebbe una delle sue parti situata esattamente sopra un' altro piano, e 'l resto, o elevato all' insù, o abbassato, ciocch' è impossibile (621).

629. COROLL. *La comune sezione di due piani non può essere, che una linea retta.* Poichè la comune sezione di due piani è una linea, tutt' i punti della quale sono comuni ai due piani.

630. IPOTESI. Supponiamo frattanto un piano immobile A su 'l quale sia situato un altro piano B terminato da linee rette, come sarebbe un poligono ordinario: questi due piani

ni

ni non avendo alcuna profondità , non possono formare , che un solo e medesimo piano . Ma se si fa girare il piano B sopra uno de' suoi lati , che resti sempre situato su 'l piano A , si concepirà facilmente 1°. che dal primo istante del moto , non resterà altro di comune ai due piani , che la retta sopra la quale girerà il piano B , 2°. che questo piano passerà per tutt' i gradi possibili d' inclinazione , se si faccia girarlo fintantocchè venga a situarsi su 'l piano A dall' altro lato , 3°. ch' esso diverrà perpendicolare al piano A , quando non sarà inclinato più da un lato , che da un' altro , 4°. che i differenti gradi d' inclinazione faranno misurati pe' l numero de' passi , che ciascun punto avrà descritto dopo aver lasciato il suo punto corrispondente nel piano A . Questo farà dunque un' arco di cerchio , il cui centro sarà nella linea , sopra la quale il piano gira ; e perchè un centro dee esser nel piano del cerchio , il centro di quest' arco sarà necessariamente nella retta , che girando forma il piano di quest' arco . Or una retta , che giri (618) , non può formar un piano , s' ella non . è perpendicolare alla linea , sopra la qual' ella gira : dunque *il centro dell' arco , che misura i gradi d' inclinazione d' un piano per rapporto a un' altro , è in una perpendicolare tirata da un punto qualunque di quest' arco alla linea dell' incontro de' due piani .* Se dunque si descriva un semicerchio , il cui centro sia nella linea comune ai due piani , e' l cui piano

no sia perpendicolare alla lor linea d'intersezione, tutt' i gradi di questo semicerchio misureranno tutte le inclinazioni possibili del piano mobile.

Si concepisce anche , che se una parte del piano mobile B avendo attraversato il piano A girasse sulla linea d'intersezione , l'altra parte girerebbe nel medesimo tempo , e farebbe co' l piano immobile i medesimi angoli dall' altra parte .

Donde segue generalmente , che due piani de' quali uno inclini sopra dell' altro , anno le medesime proprietà , che due rette , anche inclinate . Dunque.....

631. TEOR. VIII. *Un piano , che incontra un' altro piano , fa con lui due angoli retti , o uguali insieme a due retti .*

632. TEOR. IX. *Nella intersezione de' due piani , gli angoli opposti al vertice sono eguali .*

633. TEOR. X. *La somma degli angoli di quanti piani si vogliano , che anno una medesima linea d' intersezione , è di 360 gradi .*

634. TEOR. XI. *Ei non v' ha , che una sola linea , che passando per un piano , possa essergli perpendicolare ; e da un punto preso fuori d' un piano , non si può abbassargli sopra , che una perpendicolare .*

635. TEOR. XII. *La distanza d' un punto a un piano , è la perpendicolare tirata dal detto punto al piano .*

636. TEOR. XIII. *Un piano , che taglia due , o più piani paralleli fra di loro , forma con essi*

essi gli angoli alterni esterni eguali, gli angoli alterni interni eguali, e gli angoli interni supplementi l'uno dell'altro, * o eguali a due retti, * e gli angoli esterni anche supplementi l'uno dell'altro, * o eguali a due retti; e reciprocamente.

637. TEOR. XIV. *Le comuni sezioni di due, o più piani paralleli a un terzo, sono rette parallele; poichè s'elleno non fossero parallele, potrebbero incontrarsi; dunque i piani, ne' quali elleno sono, s'incontrerebbono anche; dunque questi piani non fariano paralleli.*

SEZIONE TERZA

DE' SOLIDI.

638. **S**I chiama *Corpo*, o *Solido*, ogni quantità continua, ovvero ogni spazio; che ha le tre dimensioni della estensione, cioè la lunghezza, la larghezza, e la profondità.

Si considerano ordinariamente i solidi in due maniere: 1°. come formati dal movimento de' piani, nella stessa guisa appunto che abbiám detto, che i piani si formano dal movimento della linea retta, e la linea (390) dal

dal movimento del punto . Secondo questa idea , un solido non è altra cosa , che un' ammasso di piani di profondità infinitamente piccola , il cui numero infinito è uguale al numero de' punti della linea , che misura il cammino del piano , che ha formato il solido : ciascun di questi piani si chiama uno degli *elementi* del solido .

639. Questi solidi son prodotti da un movimento rettilineo d'un piano , che sia sempre parallelo a se medesimo ; o dalla rivoluzione circolare d'una figura sopra una retta immobile , che si chiama l'*asse* del solido .

640. II°. Si può considerare anche un solido come composto d'altri solidi simili , o nò , appoggiati uno contro l'altro , e de' quali ordinariamente si suppone , che due delle loro tre dimensioni sieno infinitamente piccole : queste spezie di piccoli solidi s'appellano anche gli *Elementi* del solido , ch'essi compongono .

641. I solidi , le cui facce sono piane si chiamano generalmente *Poliedri* , ed essi prendono il nome di *Tetraedo* , *Pentaedro* , *Esaedro* , &c. quando essi hanno 4 , 5 , 6 , &c. facce . Si chiamano *Poliedri Regolari* , se i loro angoli son tutti eguali , e le loro facce de' poligoni regolari uguali , e della medesima spezie .

642. Se s'immagini un piano , che passi a traverso d'un solido , come per tagliarlo in due parti , la figura formata sulla superficie del solido per l'incontro delle sue facce co'l
pia-

piano, che divide, si chiama una *Sezione* di questo solido: ed egli è chiaro, che questa sezione è un poligono, che ha tanti lati, quante facce ha incontrato il piano, che taglia.

Origine, e proprietà de' solidi, formati da un movimento rettilineo.

643. **I**POTESI I. Sia una figura piana qualunque ABCDE, (fig. 47, o 48.) ch'essendo dappprincipio situata sopra d'un piano, scorra parallelamente a se medesima lungo la retta MN, e s'arresti in FGHK: questa figura avrà prodotto, con le sue tracce, un solido, che s'appella un *Prisma*.

In questo movimento egli è chiaro 1°. che i lati AB, BC, CD, &c. anno descritt' i parallelogrammi ABGF, BCHG, CDIH, &c. 2°. che ciascuna traccia, o Elemento del Prisma, e che ciascuna base sono tanti poligoni eguali, e similmente posti. Dunque in generale

Il Prisma è un corpo terminato da basi, che sono figure uguali, e parallele, e da facce, che sono parallelogrammi.

644. Il Prisma è retto, o obliquo, secondo, che la linea MN, lungo la quale si muove il poligono generatore, è perpendicolare, ovvero inchinata su'l piano della base del Prisma.

645. La retta PQ (fig. 48), o Pq (fig. 47), che passa per mezzo di tutti gli elementi del solido, si chiama l' *Asse* del Prisma; egli è uguale, e parallelo a tutt' i lati AF, BG, CH, &c. del Prisma, poichè e' rappresenta la traccia del centro del poligono generatore.

646. Una perpendicolare PQ (fig. 47) tirata da uno de' punti qualunque d' una delle basi su 'l piano dell' altra base, prolungato s' è necessario, si chiama l' *altezza* del Prisma.

647. COROL. I. L' *altezza* d' un prisma retto è uguale, al suo *asse*, e l' *altezza* d' un prisma obliquo è tanto minore dell' *asse*, quanto questo solido è più inclinato al piano della sua base.

648. COR. II. L' *altezza* d' un solido qualunque composto d' elementi, che sono piani paralleli, esprime il numero di questi elementi. Poichè ella esprime la distanza de' piani dalle due estremità del solido; or ei non ponno esservi più elementi fra questi piani, che non vi sono punti nella linea, che misura la lor distanza: dunque l' *altezza* d' un solido esprime il numero de' suoi elementi, quando si ponno prender questi elementi per piani paralleli.

649. Il Prisma prende differenti nomi secondo la specie del poligono generatore. Se questo è un Triangolo, il Prisma si dirà *Triangolare*; s' è un Quadrilatero, si chiamerà *Quadrangolare*; s' è un Pentagono, si dirà *Pentagonale*, &c., s' è un cerchio, e se il suo mo-

vi.

vimento si fa lungo una linea perpendicolare al piano di questo cerchio, il Prisma si chiamerà un *Cilindro Retto*, (vedete la fig. 49).

650. Se 'l poligono generatore del Prisma è un Parallelogrammo, il Prisma s'appella *Parallelepipedo*: se il Parallelogrammo è un rettangolo, e se 'l Prisma prodotto da questo rettangolo è retto, ei s'appella un *Parallelepipedo rettangolo*, (vedete la fig. 50). Se 'l Poligono generatore è un quadrato; se 'l Prisma formatone è retto, e ha il suo asse uguale al lato del quadrato, si chiama *Cubo*, o *Esaedro regolare*. (fig. 51).

651. IPOTESI II. Se una figura piana qualunque ABCDE (fig. 52. 53.), ch'essendo situata sù d'un piano, s'avanzi lungo una linea qualunque MN (perpendicolare, ovvero inclinata al piano della figura,) in maniera che, a ciascun passo ciascun lato della figura scemi in progression Arimmetica: per cagion d'esempio, che dopo il primo passo infinitamente piccolo, ciascun lato perda $\frac{1}{\infty}$ della sua lunghezza, che dopo il secondo

passo ciascun lato perda ancora $\frac{1}{\infty}$ della sua prima lunghezza, &c. in maniera che la figura essendo arrivata in M, non abbia più, che lati infinitamente piccoli, o sia ridotta a non esser più, che un punto; il solido formato in questa maniera si chiama una *Piramide*: il punto M s'appella il *vertice*: e 'l poligono ABCDE si dirà la *base*. Egli

Egli è chiaro , che in questa formazione ciascun lato AB , BC , CD , &c. della figura , avrà descritto i Triangoli ABM , BCM , CDM , &c. poichè (592) lo spazio , che abbraccia un Triangolo è riempito da una infinità di parallele , che vanno in progressione arimmetica da zero , ch'è la cima del Triangolo , fino alla sua base .

652. Dunque I°. in generale , una *Piramide* è un solido , che ha per base un poligono , e ch'è terminata da facce triangolari .

653. II°. La linea NM , che si tira dal vertice M al punto N nel mezzo della base , s'appella l'*asse* della Piramide ; la sua *altezza* è la perpendicolare MN (fig. 52) , o Mn (fig. 53) , la qual è uguale , o minore del suo asse , secondo che la Piramide è retta , o inchinata .

654. La Piramide prende anche differenti nomi , secondo la specie del Poligono della sua base ; se quest' è un triangolo , ella s'appella *Triangolare* : s'è un triangolo equilatero , e se l'asse essendo perpendicolare , le facce sono anche triangoli equilateri , la Piramide dicefi *Regolare* , o *Tetraedro Regolare* . S'è un quadrilatero , la Piramide si chiama *Quadrangolare* , ovvero *a quattro facce* . S'è un pentagono , dicefi *Pentagonale* , &c. infine s'è un cerchio , e se l'asse è perpendicolare al piano del cerchio , la Piramide s'appella un *Cono retto* : se l'asse fusse inchinato a questo piano , si direbbe una *Conoide* .

655. Se nella formazione della Piramide si concepisce, che l' poligono generatore s' arresti, prima d'esser divenuto infinitamente piccolo, la Piramide, o l' Cono, che si formano in questa maniera, diconsi *Piramidi*, o *Coni Truncati* (fig. 55), poichè si può considerarli come Piramidi, o Coni, di cui si fusse tagliata una parte per mezzo d'un piano parallelo alla base.

Origine, e proprietà de' solidi prodotti per un movimento circolare.

656. 1^o. **S**I può concepire il cilindro retto formato per un movimento circolare in due maniere; o facendo girare un rettangolo MABN (fig. 49) sopra un lato de' suoi immobile MN, e che diviene l' asse del cilindro; o supponendo due cerchi immobili AC, BD uguali, e paralleli, e i cui centri siano in una stessa retta perpendicolare ai loro piani, e facendo girare la retta AB tutta intorno di questi cerchi.

657. Si può infine concepire il cilindro formato per un fascio di prismi retti infinitamente piccoli di base uguali, e della stessa altezza, racchiusi fra due cerchi uguali, di cui eglino riempiscano esattamente lo spazio, e l' cui numero sia uguale a quello de' punti della superficie di questi cerchi.

658. II°. Si può concepire il cono retto formato per un movimento circolare, 1°. facendo girare un triangolo rettangolo MNB (fig. 54) sopra un de' suoi lati MN , che farà l'asse del cono , l'ipotenusa MB descriverà la superficie , e l'altro lato NB farà il raggio della base . 2°. Supponendo , che all'estremità M d'una retta MN elevata perpendicolarmente sopra il piano d'un cerchio BD, e passando pe'l suo centro, sia fissata l'estremità M d'un'altra retta MB , e che l'altra estremità B giri intorno del cerchio BD. Donde si vede, che *tutt' i punti , che formano la circonferenza della base del cono retto sono ad ugual distanza dal vertice M.*

659. Il cono troncato è formato pe'l movimento d'un trapezio ABND , di cui due lati AB , ND son disuguali , paralleli fra loro , e perpendicolari alla retta AN sulla quale questo trapezio gira .

660. III°. Se si fa fare una rivoluzione a un semicerchio sopra il suo diametro , il solido prodotto per questo movimento si chiama un *Globo* , o una *Sfera* .

La Sfera dunque è un solido , tutt' i punti della cui superficie pres' in qualunque maniera sono ugualmente lontani da un punto al di dentro , che n' è il centro .

661. Se s'immagini , che per tutt' i punti successivi P , e P , &c. (fig. 69) , che compongono il diametro Ss del semicerchio generatore , si sien fatte passare le perpendico-
lari

lari MP , MP , &c. terminate alla circonferenza, egli è chiaro, che pel movimento del semicerchio generatore SMs sul diametro Ss , tutte queste perpendicolari saranno i raggi di tanti cerchj, quanti se ne possono contenere fra S , e s , e che si possono considerare tutti questi cerchj, come tanti cilindri infinitamente piccoli, d'un ugual grossezza, che formano gli elementi della sfera, e i cui semidiametri crescono, e decrescono nella stessa ragione di tutte le corde parallele Mm , Mm che si possono tirare successivamente in un cerchio.

Ma se si considera il semicerchio generatore come una metà del poligono regolare d'una infinità di lati, (fi. 58) e se si supponga, che si fiano abbassate da tutti gli angoli successivi le rette DT , EX , GC , &c., perpendicolari sul diametro di rotazione dL , egli è evidente, che queste rette prese a due a due formano i trapezj $dFDT$, $TDEX$, $XEGC$, &c., e che per conseguenza nel movimento di rotazione del semicerchio dGL sul diametro dL , questi trapezj formano tanti coni troncati $OFDB$, $BDEA$, $AEGP$, &c.. Si può dunque in questa ipotesi riguardar la sfera come composta d'una infinità di coni troncati d'una grossezza dissuguale, ma infinitamente piccola.

Infine se si supponga, che si fiano descritti al di dentro del semicerchio generatore tanti semicerchj concentrici, quanti punti vi sono nel raggio di questo semicerchio; egli è

X 2

chia-

chiaro, che in vigor di questo movimento di rotazione tutti questi semicerchj formeranno tante superficie sferiche concentriche; si può dunque dire, in questa ipotesi la sfera, come composta d'una infinità di superficie sferiche d'una grossezza infinitamente piccola, ma uguale, e commesse una dentro l'altra.

662. Si chiama *Asse* della sfera ogni retta, che passando per lo centro termina dall'una, e l'altra parte nella superficie.

663. Dunque tutti gli assi della sfera son uguali fra loro, perchè sono la somma di due raggi.

664. La sfera essendo prodotta nel modo già detto, è chiaro, che, a cagione della regolarità, e dell'uniformità di sua figura, si può prendere uno de' suoi assi qualunque per l'asse del semicerchio generatore.

665. Onde segue I°. Che in qualunque maniera si divida la sfera per un piano, la sezione sarà un cerchio. Imperocchè se per lo centro della sfera si faccia passare un'asse perpendicolare al piano di questa sezione, si potrà prendere (664) quest'asse per lo diametro del semicerchio generatore, e per conseguenza il piano, che divide, incontrando perpendicolarmente il diametro, taglierà la sfera in uno de' suoi Elementi, che (661) sono tutti cerchj.

666. II°. Che le sezioni della sfera per un piano qualunque sono cerchj tanto più grandi, quanto il piano dividente è più vicino al centro della

della sfera, e reciprocamente, che la più gran sezione possibil' è quella, che passa per lo centro; poichè queste sezioni anno per diametri le corde, che sono (453) tanto più grandi, quanto sono più vicine al centro, e di cui la massima è quella, che passa per lo centro.

667. III°. E perciò si chiama il *cerebio massimo* della sfera quello, che ha lo stesso centro con la sfera; e si chiama *piccolo cerchio* della sfera, quello, il cui piano non passa per lo centro della sfera.

668. IV°. Infine si può considerare la sfera, come composta d'una infinità di Piramidi uguali infinitamente piccole, delle quali n'è la base ciascun de' punti della superficie della sfera, e i cui vertici tutti concorrono al centro della sfera.

Si può poi considerare, a cagion della regolarità della sfera, che ciascun di questi punti, che servono di base, sono poligoni regolari, infinitamente piccoli, e uguali fra di loro: e che perciò sono, o triangoli equilateri, o quadrati, o effagoni; poichè non v'ha, che queste tre spezie di poligoni regolari, che possono avere due a due i loro lati comuni senza lasciare spazio vuoto.

De' Poliedri, e' loro rapporti.

669. **S**I chiama *angolo solido* un'angolo formato per lo concorso di più angoli piani, ch' essendo inclinati gli uni sopra gli altri, si uniscono in un sol punto; tali sono i vertici delle Piramidi, le punte de' Prismi, &c., e si chiamano *angoli solidi uguali*, quelli, che sono composti d'un'ugual numero d'angoli piani, di cui gli opposti sono uguali, e similmente posti. Dunque.....

670. **TEOR. I.** *Vi bisognano almeno tre angoli piani per formare un angolo solido; poichè il più semplice de' poligoni, che quest'angolo solido poss'aver per base è un triangolo (652, e 654).*

671. **TEOR. II.** *Di due angoli piani, che formano un angolo solido, il più grande dev'esser minore della somma degli altri due; imperocchè se fosse solamente uguale alla somma degli altri due, non potrebbe far altro, che combaciare sopra questi, e per conseguenza non potrebbe formarne un punto solido.*

672. **TEOR. III.** *La somma di tutti gli angoli piani, che compongono un'angolo solido, dev'esser minore di 360 gradi, purchè quest'angolo solido non sia composto d'angoli convessi, e concavi. Imperocchè se la somma di più angoli piani è di 360°, riunendoli tutt' in uno stesso vertice,*

tice, compongono un piano, e non se ne potrà formar giammai un punto elevato, se non si toglie qualche cosa da questi angoli.

673. TEOR. IV. *E' certo, che due angoli solidi A, a, composti ciascuno di tre angoli piani, sono uguali fra di loro, qualora si sa, che due degli angoli piani D, B del primo angolo solido A sieno uguali a due angoli piani d, b dell'angolo solido a, ciascuno a ciascuno, e che l'inclinazione de' piani B, D è uguale all'inclinazione de' piani b, d.*

DIM. Poichè supponendo uguale la lunghezza di tutt' i lati di questi angoli piani, (com' ella è quando si termina con la superficie d'una sfera) egli è chiaro, ch'essendo uguale la inclinazione, e uguali gli angoli piani corrispondenti, si può concepire, che i due angoli piani B, e D (considerati indipendentemente dal terzo, che perfeziona l'angolo solido) fanno una spezie d'angolo cavo, nel quale si può incastrar esattamente l'angolo cavo formato dagli angoli piani b, d, poichè tutti sono uguali da una parte, e dall'altra. Dunque ciascun di questi cavi non può esser coverto, che da un'angolo piano uguale da una parte, e dall'altra, ciò che fa vedere (669), che i due angoli solidi A, ed a sono uguali.

674. SCOLIO. Si può dimostrar ancora, che se due angoli solidi son composti di quattro angoli piani, e si sia certo d'una perfetta uguaglianza in questi tre angoli piani di

ciascun angolo solido, e nella loro inclinazione scambievole, il quarto angolo dè esser uguale in ciascuno, e i due solidi anche uguali. Lo stesso si può dimostrare di due angoli solidi composti di 5, 6, &c. angoli piani.

675. TEOR. V. *Un poliedro bisogna, che abbia almeno 4 facce; imperocchè vi bisognano almeno tre piani per formare uno degli angoli solidi d'un Poliedro; or un'angolo così formato lascia un vuoto al di dentro; vi bisogna dunque almeno un'altro piano per coprire questo vuoto, e perchè il Poliedro abbia le sue tre dimensioni.*

676. TEOR. VI. *E' bisogna, che un poliedro abbia almeno 4. angoli. Imperocchè il vuoto, che lasciano i piani formanti l'angolo solido, è terminato per una figura piana, che ha almeno tre angoli (482); or non si possono formare gli angoli di questa figura senza formarvi altrettanti angoli solidi; bisogna dunque, che un Poliedro ne abbia almeno quattro.*

677. TEOR. VII. *Non vi possono essere, che cinque Poliedri regolari, cioè, tre, le cui facce sian triangoli equilateri, uno, le cui facce sian quadrati, e uno, le cui facce sian Pentagoni regolari.*

Imperocchè (670) poichè vi bisognano almeno tre angoli piani per formare un angolo solido, e che un angolo solido (672) non può essere di 360°; egli è chiaro, che non vi sono, che cinque casi, ne quali si possa fare un angolo solido co' piani de' poligoni regolari. 1°. L'angolo d'un trian-

triangolo equilatero essendo di 60° , tre congiunti insieme, ne fanno un solido di 180° , e per conseguenza quattro triangoli di questa specie possono fare un tetraedro. 2°. Quattro triangoli equilateri congiunti insieme possono fare un'angolo solido di 240° , e formare un corpo regolare a otto facce, detto Ottaedro. 3°. Cinque di questi triangoli congiunti insieme possono fare un angolo solido di 300° , e per conseguenza se ne può comporre un corpo di 20 facce, detto Icosaedro; ma 6 congiunti insieme fanno 360° , onde non possono fare un angolo solido. 4°. Ciascun angolo d'un quadrato essendo di 90° , tre congiunti insieme formano un angolo solido di 270° , e per conseguenza se ne potrà comporre un corpo regolare a 6 facce, che diceasi Esaedro; ma 4 di questi angoli farebbero 360° , onde non possono comporre un angolo solido. 5°. Ciascun'angolo d'un pentagono regolare è di 108° , 3 congiunti insieme potrebbero fare un angolo solido di 324° ; e se ne potrebbe fare un corpo regolare a 12 facce, che chiamasi Dodecaedro: ma se si congiungessero 4 di questi angoli, si avrebbero 432° , angolo solido impossibile. Infine l'angolo dell'esagono regolare essendo di 120° , se si congiungessero tre insieme, la somma 360° non potrebbe comporre un angolo solido, e con più forte ragione no'l potrebbero tre angoli dell'ettagono, Ottogono, &c. Dunque non vi possono essere che cinque soli Poliedri regolari.

OSSER. Ei sarebbe ben fatto d'aver nelle mani, leggendo questo teor., de' poligoni regolari uguali, fatti di cartone, o d'altra materia, per costruire questi Poliedri, Della

Della comparazione de' solidi.

678. **S**I chiamano *solidi simili*, quei, i cui angoli tutti *omologhi* sono uguali, e le cui facce sono figure simili, che per conseguenza possono (575) ridursi in triangoli simili, e hanno tutte le loro dimensioni omologhe proporzionali.

679. **COROLL.** *Due poliedri regolari qualunque della stessa specie, e per conseguenza due sfere sono solidi simili.*

680. Per avere un'idea di due solidi simili chiara, e compita, ei bisogna concepirli come composti tutti e due d'un ugual numero di piani simili, e similmente posti, di maniera che la loro dissuguaglianza consista in ciò, che ciascun elementare del solido maggiore abbia una superficie, e una grossezza maggiore, che non è la superficie, o la grossezza del piano omologo del minor solido, ma questi piani omologhi serbino sempre uno stesso rapporto. Per esempio due sfere sono due solidi simili 1°. perchè sono composte di piani circolari, che sono figure simili. 2°. Questi piani sono similmente posti in ciascuna sfera, perchè sono situati perpendicolarmente all'asse, che passa pe' loro centri, e sono ordinati in modo, che i loro diametri seguano il rapporto di tutte le corde successive

ve

ve del cerchio. 3°. Sono in ugual numero in ciascuna sfera, perchè tutti i cerchj immaginabili anno uno stesso numero di lati infinitamente piccoli, e per conseguenza anno ciascuno un ugual numero di corde; imperocchè le corde sono rette, che congiungono tutti gli angoli, o tutt' i lati, che sono situati della stessa maniera, e ad ugual distanza da una parte, e dall' altra dell' asse.

681. La differenza, che passa fra la sfera maggiore, e la minore è, che 1°. ciascun diametro di tutt' i piani elementari della sfera maggiore, è maggiore (ma in un rapporto costante) di quella di ciascun piano omologo della minore. 2°. Che i lati de' piani elementari della sfera maggiore, essendo (quantunque infinitamente piccoli) maggiori di quelli della sfera minore, le corde, che gli congiungono da una parte, e dall' altra dell' asse, sono meno serrate, e per conseguenza la grossezza de' piani, ch' è misurata per l' intervallo di queste corde, è maggiore nella sfera grande, che nella piccola.

682. Secondo l' idea, che s' è data di due solidi simili, egli è chiaro, che *non v' ha punto preso in una delle facce d' uno di questi solidi, che non abbia il suo corrispondente, o similmente posto sulla faccia omologa dell' altro solido* (575): Si dà anco conchiudere, che *non v' ha punto nella parte di dentro di questi solidi, che non abbia il suo corrispondente, o similmente posto nell' altro*: poichè questi due solidi son com-

composti del medesimo numero d'Elementi; di cui i corrispondenti in ciascun solido, sono figure simili, e similmente situate, le quali anche son composte di punti similmente posti.

683. TEOR. I. Se avendo tirato attraverso d'un solido qualunque una retta PQ (fig. 57) che termini a' due punti qualunque P, Q delle facce KC, EG, si faccia pàssare attraverso d'un solido simile una retta pq (fig. 56), che termini a' due punti p, q similmente situati; queste due rette saranno dimensioni omologhe de' due solidi, o ciochè è lo stesso, elleno saranno tra di loro, come un lato qualunque preso nel primo solido al lato omologo preso nel secondo. Per esempio, s'avrà $PQ : pq :: GA : ga$.

DIM. Se per due angoli omologhi qualunque D, d; e per li punti P, Q; p, q s'imaginino un piano, che taglia i due solidi: i triangoli DQP, dqp, che giacciono su'l piano di queste sezioni, saranno simili: Imperocchè 1°. i punti Q, q, e P, p, danno questa proporzione (578) $DP : dp :: DQ : dq$; e inoltre essi fanno gli angoli PDF, FDQ uguali agli angoli corrispondenti pdf, fdq, 2°. essendo simili i solidi, le facce FA, FC sono inchinate fra di loro della stessa quantità, che sono inchinate le facce corrispondenti fa, fc. Dunque (673) l'angolo solido formato in D dagli angoli piani PDF, FDQ, PDQ, è uguale all'angolo solido formato in d dagli angoli piani corrispondenti. Dunque l'angolo piano QDF = qdf, e i triangoli QDF, qdf

anno

anno ambidue un'angolo uguale compreso tra due lati omologhi proporzionali; Dunque (559) questi triangoli sono simili; e si ha $QP : qp :: DQ : dq :: AG : ag$ &c.

684. COR. Tutt' i punti, che compongono la superficie del triangolo QDF sono in medesimo numero, e similmente posti riguardo a que', che compongono la superficie del triangolo qdf: onde segue, che i piani dividenti, ne' quali sono situati i triangoli PDQ, pdq, passano per punti, che sono tutti similmente situati ne' due solidi, e perciò le parti de' due solidi, che sono tagliate da questi piani dividenti, sono due porzioni simili di questi solidi, come anche le parti, che rimangono; onde si può dire, che *se per tre punti omologhi presi (non in linea retta) sulla superficie di due solidi simili, si faccia passare un piano attraverso de' due solidi, questi saran divisi in due punti, di cui gli omologhi faranno anche simili.*

685. Se da angoli omologhi qualunque C, c, s'abbassino sopra i piani omologhi vicini, od opposti, prolungati, o nò, le perpendicolari CR, cr, che misurano le altezze C, c su questi piani: elleno saran proporzionali ai lati, o linee qualunque omologhe: per esempio, s'avrà $CR : cr :: CE : ce :: PQ : pq$, &c.

DIM. Per li punti E, e (ove terminano i lati CE, ce sopra i piani delle basi FH, fb) tirate ai punti R, r (ove terminano le perpendicolari CR, cr su i medesimi piani prolungati), le rette ER, er, le quali com-

bace-

baceranno sù questi medesimì piani prolunga-
ti, e faranno (624) perpendicolari alle ret-
te CR, *cr*. I triangoli CER, *cer* faranno
dunque rettangoli in R, *r*, e simili fra di
loro, poichè sono anche simili i solidi, che
rendono i lati omologhi CE, *ce* egualmente
inclinati sù i piani omologhi GHEF, *ghef*:
e in conseguenza gli angoli CER, *cer* uguali
fra di loro. Dunque $CR : cr :: GE : ce ::$
 $PQ : pq \&c.$

686. SCOLIO. La proprietà generale de'
solidi simili è dunque l'aver tutte le loro di-
mensioni omologhe proporzionali fra di loro.,

*Della misura delle superficie di ciascuna specie
di solidi.*

687. **N**Oi chiameremo in appresso la *super-
ficie d' un solido* quella delle sue fac-
ce solamente senza comprendervi la sua base,
se vi è; e chiameremo *superficie totale d' un
solido* quella delle sue facce insieme con la
base.

688. ASS., o TEOR. I. *La superficie to-
tale d' un solido, o Poliedro qualunque è uguale
alla somma delle superficie delle figure, che com-
pongono le facce insieme con la base.*

689. TEOR. II. *La superficie d' un prisma
qualunque è uguale al prodotto d' uno de' suoi lati
qualunque moltiplicato pe' l' contorno del prisma mi-
sura-*

fuato in un piano perpendicolare a questo lato.

Tutt'i lati del Prisma sono rette uguali, e parallele. Se dunque per un punto preso ad arbitrio sopra i lati del Prisma, s'immagini un piano, che divida il Prisma perpendicolarmente a questo lato, questo piano dividerà anche tutti gli altri lati (434) perpendicolarmente, e la sezione sarà un poligono, di cui ciascun lato sarà perpendicolare a due lati paralleli, che terminano ciascuna faccia del Prisma. Dunque (589) la superficie di ciascuna faccia sarà uguale al prodotto di ciascun lato della sezione per un de' lati qualunque del Prisma (poichè eglino sono tutti uguali): Dunque la superficie del Prisma sarà uguale al prodotto di tutt'i lati della sezione, cioè a dire, di tutt'i lati del contorno moltiplicato per un de' lati qualunque del prisma.

690. COROLLARIO. *La superficie d' un Prisma retto, e quella d' un cilindro retto è uguale al prodotto del suo asse pel contorno d' una delle sue basi.*

691. TEOR. III. *La superficie d' una piramide retta, la cui base è un poligono regolare, è uguale al prodotto della metà del contorno della sua base moltiplicata per una perpendicolare calata dal vertice sopra uno de' lati della base. Si chiama questa perpendicolare l' Apotema della piramide.*

Imperocchè la sua superficie è uguale (688) alla somma delle superficie de' triangoli, che formano le sue facce. Or tutti questi triangoli

goli essendo uguali la somma delle loro superficie è uguale al prodotto dell'altezza d'uno di questi triangoli (cioè a dire dell'Apotema) per la metà della somma delle loro basi, cioè a dire per la metà del contorno del piede della piramide.

692. OSSERVAZIONE. Se la piramide non fosse retta, o se la base non fosse un poligono regolare, non se ne potrebbe aver la superficie, che in prendendo successivamente la superficie di tutt'i triangoli, che formano le facce.

693. COR. La superficie d'un cono retto è uguale alla metà del prodotto della circonferenza della sua base, per la lunghezza de' suoi lati, o per uno de' suoi apotemi.

694. TEOR. IV. La superficie di ciascuna faccia d'una piramide qualunque, troncata per un piano parallelo alla sua base, è uguale alla metà del prodotto di quello, che resta dall'apotema su questa faccia, per la somma della base, e della sezione, o della retta, che termina la parte divisa. O ciò, ch'è lo stesso (281) ella è uguale al prodotto del resto dell'apotema per una parallela alla base tirata su questa faccia dal punto di mezzo del restante dell'Apotema.

DIM. Ciascuna faccia d'una piramide è (651.) un triangolo, la cui superficie (592) è una serie infinita di rette parallele alla sua base, le quali sono in progressione aritmetica, il cui primo termine è il vertice di questo triangolo, l'ultimo è la base stessa,

e'l numero de' termini è notato dalla perpendicolare abbassata dal vertice sopra la base. Or la superficie d'una faccia d'una piramide troncata parallelamente alla sua base è questa stessa serie, da cui se ne sono tolti i termini verso il principio, e'l cui primo termine è la retta, che termina la parte divisa, e'l ultimo è anchè la base, e'l loro numero è determinato dal restante della perpendicolare, o apotema: Dunque questa superficie è (280) uguale alla metà del prodotto della somma della sezione, e della base pe'l restante dell' apotema, o (281) al prodotto della retta media tra la sezione, e la base, pe'l restante dell' apotema, cioè per una perpendicolare alla base tirata da un punto preso nella sezione.

695. COROL. I. Se la piramide è retta, e ha una base regolare, tutte le facce restanti sono uguali, e le rette medie tra la sezione, e la base fanno il contorno dell' elemento della piramide medio fra le due estremità. Dunque la superficie d' una piramide retta a base regolare, e troncata parallelamente alla sua base, è uguale al prodotto d' una perpendicolare tirata sopra una faccia, da un punto preso nella linea di sezione, pe'l contorno dell' elemento medio tra le due estremità della piramide.

696. COR. II. La superficie d' un Cono retto troncato per un piano parallelo alla sua base, è uguale al prodotto d' un de' suoi lati pe'l contorno del cerchio mezzo fra le due estremità.

697. TEOR. IV. La superficie della sfera è
Tomo II. Y ugua-

uguale al prodotto della circonferenza del suo cerchio massimo moltiplicato pe' l' suo asse.

DIM. Se si dimostri, che la superficie d' uno de' coni troncati, che formano (661) gli elementi della sfera, è uguale al prodotto dell' asse di questo cono troncato per la circonferenza d' uno de' cerchj massimi della sfera, s' avrà dimostrato (222) che la somma delle superficie di tutti questi coni troncati, e per conseguenza, la superficie della sfera, è uguale al prodotto della somma di tutti gli assi de' coni (cioè a dire dell' asse intero della sfera) moltiplicato per la circonferenza del suo cerchio massimo (fig. 50). Dunque per Y metà del lato, o apotema AB del cono troncato ABDE preso a piacere, tirate YR parallelo a' piani BD, AE; e YS perpendicolare, che passerà (459) pe' l' centro della sfera, e ne sarà un' asse. Per B tirate BZ, perpendicolare sopra AE, e avrete BZ uguale all' asse TX del cono troncato; tirate RS. I triangoli rettangoli ABZ, YRS sono simili avendo oltre l' angolo retto, l' angolo $BAZ = RSY$. Imperocchè, essendo YR, AE parallele, l' angolo $BAZ = RYB$. Or l' angolo RYB ha per misura (465) la metà dell' arco YdR, come anche l' angolo RSY; dunque l' angolo $RSY = BAZ$; dunque anche $ABZ = RYS$. Dunque (556) BZ , o $TX : AB :: YR : YS$. Ma (581) le circonferenze de' cerchj sono fra loro, come i loro diametri: dunque TX è ad AB, come la cir-

cir-

circonferenza del cerchio, di cui YR sarebbe il diametro, alla circonferenza, di cui YS è il diametro; (cioè a quella d'un cerchio massimo della sfera). Dunque (300) il prodotto di TX per la circonferenza d'un cerchio massimo della sfera è uguale al prodotto di AB per la circonferenza, di cui YK è il diametro, e per conseguenza alla superficie (696) d'un cono troncato BAED: dunque la superficie di questo cono troncato è anche uguale al prodotto del suo asse TX per la circonferenza d'uno de' cerchi massimi della sfera.

698. COROL. I. *La superficie d'una sfera è quadrupla di quella del suo cerchio massimo; imperocchè la superficie del cerchio massimo della sfera è uguale al prodotto del suo semidiametro $\frac{1}{2}d$ per la semicirconferenza $\frac{1}{2}p$ (605), il quale è $\frac{1}{4}dp$, quandocchè la superficie della sfera è $= pd$, prodotto del suo asse d per la circonferenza p del suo cerchio massimo.*

699. COROLL. II. *La superficie della sfera è uguale a quella d'un cilindro, il cui asse è uguale a quello della sfera, e la base uguale al cerchio massimo della sfera; e comprendendovi le basi del cilindro, la sua superficie intera è a quella della sfera, come 3 a 2: perchè allora la superficie della sfera è 4 volte la base del cilindro, e la superficie intera del cilindro è 6 volte quella della sua base.*

700. COR. III. *La superficie convessa d'una zona, o porzione qualunque di sfera determinata per la sezione d'un piano, o di due piani paralleli,*

leli, è uguale a quella d' un cilindro, che avesse nella sua base uno stesso diametro, che la sfera, e un' altezza uguale alla grossezza di questa zona: o pure è uguale al prodotto della grossezza di questa zona pel contorno del cerchio massimo di questa sfera, di cui questa zona è una porzione.

Comparazione delle superficie de' solidi.

S' è veduto fin quì, che eccettuatenne le basi de' solidi, le loro superficie sono sempre uguali al prodotto di due dimensioni: onde segue

701. TEOR. I. *Che le superficie di due solidi qualunque della stessa specie, sono in ragion composta di due loro dimensioni della stessa denominazione.*

702. COR. I. *Se due solidi della stessa specie anno in ciascuno una dimensione uguale, le loro superficie sono fra loro come l' altra dimensione.* Cioè le due prismi retti, due cilindri retti anno una stessa altezza, o se due piramidi rette con basi regolari, o due coni, &c. anno uno stesso apotema, le loro superficie sono come il contorno delle loro basi. E se due prismi retti, due cilindri retti, due piramidi rette con basi regolari, due coni, &c. anno i contorni delle basi uguali, le loro superficie sono fra loro, come i loro apotemi. Imperocchè allora (296) essi sono come i pro-

prodotti di due quantità dissuguali per una stessa quantità.

703. COROLL. II. *Se le due dimensioni, della stessa denominazione, di due solidi della stessa specie, sono in ragione inversa, le superficie sono uguali, e reciprocamente.* Così la superficie d'un cilindro retto è uguale alla superficie d'un' altro cilindro retto, o similmente d'un Prisma retto, quando l'altezza del primo è al contorno della sua base, come il contorno della base del secondo è alla sua altezza; e reciprocamente, (596, e 597).

704. TEOR. II. *Le superficie anche totali di due solidi simili qualunque, sono fra loro in ragion duplicata d' una delle loro dimensioni omologhe prese in ciascuno.*

DIM. Due solidi simili qualunque anno tutte le loro dimensioni omologhe proporzionali (686); dunque le loro superficie sono fra loro come i prodotti di quantità proporzionali, e per conseguenza (291) in ragion duplicata di queste dimensioni.

705. COROLL. *Le superficie delle sfere sono fra loro in ragion duplicata de' loro assi, o raggi.* Poichè (677) le sfere sono solidi simili, e i loro assi, o raggi sono dimensioni omologhe.

Della misura delle solidità di ciascuna specie di solidi.

706. **S**I chiama *Solidità*, o *Volume* uno spazio determinato, sia che sia vuoto di materia, sia, che venga occupato da un corpo; perchè l'idea d'ogni spazio determinato abbraccia le tre dimensioni dell'estensione. E perciò, quando si tratta d'un corpo reale, bisogna distinguere la sua *solidità* dalla sua *massa*, e dalla sua *densità*. La sua *solidità* è lo spazio dell'universo racchiuso fra le superficie delle facce di questo corpo. La sua *massa* è la quantità assoluta di materia, della qual'è egli composto; e la sua *densità* è 'l rapporto del suo volume alla sua massa; di maniera che ben si vede, che un corpo è tanto più denso, quanto più materia contiene in un più piccolo spazio.

707. Il volume d'uno spazio, o la solidità d'un corpo è uguale alla somma degli elementi, de' quali si crede composto. Questi elementi sono essi medesimi solidi, ma d'una grossezza infinitamente piccola, e che si possono per conseguenza considerare come semplici superficie; e in questa supposizione la solidità d'un corpo è la somma delle superficie, come le superficie sono una somma di linee, e le linee una somma di punti.

708.

708. Facendo sopra i solidi, ragionamenti simili a quei, che si son fatti sopra le superficie (587 , e segg.) si vedrà chiaramente. 1^o. *Che i cubi sono le misure comuni delle solidità, o volumi*. Per cagion d'esempio, un solido di 100 piedi, dè occupare uno spazio tale, che possa esser esattamente riempito da 100 cubi d'un piede l'uno. 2^o. *Che il numero delle parti d'una misura in solidità, è uguale alla terza potenza delle parti della stessa misura in lunghezza*. Così un piede solido contiene 1728 piccoli cubi d'un pollice l'uno, perchè egli è composto di dodici scompartimenti, de' quali ciascuno ha un pollice di grossezza, e un piede, o 144 pollici di superficie.

709. TEOR. I. *La solidità d'un prisma qualunque, e d'un cilindro è uguale al prodotto della sua altezza per la superficie della sua base*.

DIM. Poichè il prisma, e per conseguenza il cilindro (638) è composto di tanti elementi, o tracce d'un poligono, quanti punti vi sono nella perpendicolare, che nota la distanza delle due basi del prisma; ei segue, che per aver la sua solidità, bisogna aggiungere a se stessa tante volte la superficie del poligono generatore, quanti punti vi sono in questa perpendicolare; cioè, bisogna moltiplicare la superficie d'una delle sue basi per l'altezza del prisma: Lo stesso è, se il prisma sia retto, o sia obliquo: e lo stesso si dica del cilindro.

710. TEOR. II. *La solidità d'una piramide qualunque, o d'un cono, è uguale al terzo del prodotto della superficie della sua base per la sua altezza.*

DIM. Una piramide è composta d'una infinità di poligoni, o superficie simili, i cui lati successivi crescono uniformemente da $\frac{1}{\infty}$ dopo il vertice fino alla base, o come la serie de' numeri naturali 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. ∞ . Ma (608) le superficie simili sono fra loro come i quadrati de' loro lati omologhi: Dunque se la superficie del primo elemento, si fa = 1, quella del secondo farà 4, quella del terzo farà 9, &c., e quella dell'ultimo, ch'è la base sarà ∞^2 . La solidità della piramide essendo uguale alla somma di tutt'i suoi elementi, ella è dunque uguale alla somma della serie infinita de' quadrati 1. 4. 9. 16. ∞^2 . Ma (383) la somma de' quadrati successivi de' numeri naturali è il terzo del prodotto dell'ultimo quadrato pel loro numero: Dunque la solidità della piramide è uguale al terzo del prodotto della superficie della sua base pe'l numero de' suoi elementi, cioè a dire (648) per la sua altezza. E l'istessa cosa è del cono.

711. COROLL. *Una piramide è il terzo della solidità d'un prisma d'ugual base, e altezza: E per conseguenza con la materia, che compone un prisma, si possono formar tre piramidi, che tutte avrebbero la medesima base, e altezza co'l prisma.*

712. TEOR. III. *La solidità d'una sfera è uguale a due terzi del prodotto del suo asse per la superficie del suo cerchio massimo.*

DIM. Una sfera essendo composta di tante superficie sferiche (661), quanti sono i punti nel semiasse, la sua solidità è uguale alla somma di tutte queste superficie; or i semiasse successivi di queste superficie formano la serie infinita 1. 2. 3. 4. 5. . . . &c., e le superficie stesse la serie (609) 1, 4, 9, 16, 25 . . . &c.. Dunque la solidità della sfera è rappresentata per la somma della serie infinita de' quadrati successivi, la quale somma (383) è il terzo del prodotto dell'ultimo quadrato per lo lor numero: dunque la solidità della sfera è il terzo del prodotto della sua superficie esteriore *s* pe' l suo semiasse $\frac{1}{2} d$, ovvero $= \frac{1}{3} \times s \times \frac{1}{2} d$. Ma (698) la superficie esteriore della sfera è uguale a quattro volte la superficie *p* del suo cerchio massimo, o $s = 4 p$. Dunque la solidità della sfera è $\frac{1}{3} \times 4 p \times \frac{1}{2} d = \frac{2}{3} pd$.

713. COROLL. *Dunque se in un cilindro, il diametro della cui base è uguale all'asse, s'immaginano iscritti una sfera, e un cono retto, le loro solidità saranno rispettivamente, come 1. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{3}$; o come 3. 2. 1.*

714. SCOLIO. Per aver la solidità degli altri corpi bisogna ridurli a prismi, o piramidi, la cui somma sarà uguale a quella d'essi corpi. Ma quando il corpo è troppo irregolare, meccanicamente si misurerà così: si ponga il corpo in

un vase cilindrico , o prismatico , che si riempia d' acqua , trattone indi il corpo , si misuri esattamente il volume della parte del vaso , che resterà vuota , ella sarà press' a poco uguale a quella del corpo , che vi si sarà tuffato .

Della comparazione delle solidità de' solidi .

715. **L**A superficie d' un corpo , come s'è veduto nell' articolo precedente , è uguale al prodotto d' un' asse , o d' un' altezza per una superficie ; ma comechè una superficie è uguale (607) a un prodotto di due dimensioni : dunque tutta la solidità è un prodotto di tre dimensioni ; dunque

716. TEOR. I. *Le solidità di due solidi qualunque sono tra loro in ragion composta delle loro tre dimensioni .*

717. TEOR. II. *Le solidità di due solidi simili sono fra loro in ragion triplicata d' una dimensione omologa qualunque presa in ciascuno di questi solidi .*

DIM. Le solidità de' solidi sono in ragion composta delle loro tre dimensioni (716), ma queste ne' solidi simili sono proporzionali (606) . Dunque (291 , o 298) sono in ragion triplicata d' una delle loro dimensioni omologhe prese in ciascuno di questi solidi .

718. COROLL. I. *Le solidità delle sfere sono in ragion triplicata de' loro raggi , o diametri .*

Sc

Se dunque una sfera A ha un diametro duplo, triplo, quadruplo di quello d' un' altra sfera B, la sua superficie farà uguale a 4, 9, 16, &c. volte la superficie di quest' altra B, e la sua solidità farà uguale a 8, 27, 64, &c., volte la solidità di quest' altra B; e così degli altri solidi.

In generale un vase, le cui dimensioni sono doppie, triple, quadruple delle dimensioni d' un' altro, contiene 8. 27. 64, &c. volte tanto, quanto l' altro.

719. COROLL. II. Per costruire un solido simile a un altro, che abbia una capacità, o un volume duplo, triplo, &c., bisogna, che tutte le sue dimensioni siano a tutte quelle dell' altro, come $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, &c. a 1.

DELLA TRIGONOMETRIA.

720. **L**A Trigonometria è l' arte d' applicare il calcolo Arimmetico alla Geometria. E' ella una scienza assolutamente necessaria per passare dalla Teoria alla Pratica. Ella si chiama così, perchè insegna a calcolare tutte le parti de' triangoli, e che in fatti tutte le figure si misurano pe' triangoli, a' quali si riducono.

721. Un triangolo ha sei parti, tre angoli, e tre lati. L' oggetto della Trigonometria.

metria è di dar le regole per isciogliere questo problema in tutt' i casi , *Data la grandezza di tre delle sei parti d' un triangolo , trovar quella delle tre altre .*

722. Queste regole consistono a far di tre dati i tre primi termini d' una proporzione , o d' una analogia : quello , che si cerca , è il quarto ; ma perchè i lati d' un triangolo non anno rapporti semplici cogli angoli , le misure de' quati sono gli archi di cerchio d' un raggio indeterminato , è stato bisogno sostituire agli angoli , e agli archi , che gli misurano , differenti linee rette , che rappresentassero questi archi , e che potessero essere proporzionali a' lati de' triangoli .

723. Sia un angolo qualunque (fig. 59) ACB : Descrivete dal vertice C con un raggio qualunque un cerchio $AH\alpha G$. Prolungate AC in α , e alzate dal punto C la perpendicolare CH . Egli è chiaro , che l' angolo BCH , o l' arco HB è il complemento dell' angolo ACB , o dell' arco AB , come anche dell' angolo $BC\alpha$, o dell' arco $BH\alpha$: e l' angolo $BC\alpha$, o il suo arco $BH\alpha$ è il supplemento dell' angolo ACB , o del suo arco AB . Reciprocamente , BA è il complemento di HB , e il supplemento di αB .

724. La perpendicolare BD tirata da una dell' estremità B del raggio CB dell' arco AB , che misura l' angolo ACB sopra l' altro raggio CA , si chiama *il seno* dell' angolo ACB , o dell' arco AB : la perpendicolare AE in-

nal-

nalzarsi dall'estremità A d' uno de' due raggi fino all'incontro dell' altro raggio, prolungato quant' è necessario., si chiama *la tangente* di questo stesso arco AB: e la retta CE si chiama *la segante* di detto arco. La parte AD del raggio compresa fra l' arco, e 'l seno, si chiama *il seno verso* dell' arco AB. La perpendicolare BI, si chiama *il seno del complemento* dell' arco AB: La perpendicolare HK n' è la *tangente del complemento*: CK è la *segante del complemento*: e HI il *seno verso del complemento* dell' arco AB.

Per abbreviare, diciamo *Coseno*, *Cotangente*, *Cosegante*, *Coseno verso*, in luogo di seno del complemento, tangente del complemento, &c.

Anche per abbreviare in appresso noi scriveremo R per disegnare il raggio, *sen.* per lo seno, *tang.* per la tangente, *cos.* o *cosen.* per coseno, *cot.* o *cotang.* per la cotangente, *sen. v.* per lo seno verso. Noi non faremo uso delle seganti, nè de' seni versi nella Trigonometria.

725. Segue da queste definizioni.

1°. Che il seno, il coseno, la tangente, e la cotangente &c. d' un' angolo ottuso BCa, sono gli stessi, che per l' angolo acuto ACB, ch' è il suo supplemento. Imperocchè da una dell' estremità B, o a di uno de' raggi non si possono abbassare le perpendicolari, che sopra l' altro prolungato, quali sono BD, e ad: similmente la tangente non può essere, che

350

che ae ; ma essendo ugual' i triangoli aCd , BCD , e CAe , CAE , si ha $ad = BD$, $ae = AE$. E l'arco BH essendo il complemento di aB , come anche di AB , egli è chiaro, che BI è il coseno di aB , e HK è la sua cotangente.

726. II°. Che il seno BD d' un arco AB è la metà della corda BG , che sottende l' arco BAG doppio di AB (448).

727. III°. Che il maggiore di tutt' i seni è quello dell' angolo retto HCA , perchè allora questo seno è il raggio stesso, lo che fa, che si chiami seno totale.

728. IV°. Che i seni crescono a misura, che gli angoli crescono dopo o fino a 90° , e ch'eglino indi decrescono nella stessa maniera da 90° fino a 180° .

729. V°. Che il seno d' un arco di 30° è uguale alla metà del raggio. Imperocchè il raggio è (533) la corda d' un arco di 60° ; e (726) un seno è la metà della corda dell' arco doppio: Così il lato opposto a un angolo di 30° in un triangolo rettangolo, è la metà dell' ipotenusa di questo triangolo.

Imperocchè se ACB fosse di 30° , BG farebbe uguale a BC , e BD ne farebbe la metà.

730. VI°. Che le tangenti crescono a misura, che gli angoli crescono dopo o fino a 90° , ma in modo, che la tangente, che risponde a 90° è infinita.

Imperocchè il raggio CH dell'angolo retto HCA

HCA non può incontrar la tangente AE per terminarla, se almeno queste due rette non si prolunghino all' infinito.

731. VII°. Che la tangente di 45° è uguale al raggio. Imperocchè se l'angolo ACB fosse di 45° , il triangolo rettangolo CAE sarebbe isoscele, e però $AE = AC$.

732. VIII°. Che il seno verso AD d' un arco AB minore di 90° è uguale alla differenza fra il raggio CA, e'l coseno CD = BI; che il suo coseno verso HI è la differenza tra il raggio CH, e'l seno CI = BD; e che il seno verso del supplemento, che è D è uguale alla somma del raggio, e del coseno.

733. IX°. Che accagione de' triangoli rettangoli simili CDB, CAE, CIB, CHK; si ha $CA : CD$, o $BI :: AE : BD$ oppure $R : \cosen :: tang : sen$. Indi $CH : CI$, o $BD :: HK : IB$; o $R : sen :: cotang : cosen$. Infine $AE : CA :: CH$, o $CA : HK$. O $\div tang : R : cotang$.

Da queste proporzioni se ne diducono le formole seguenti per sostituire i seni alle tangenti &c. e reciprocamente. Sia $R = 1$ si ha

$$734. \text{ Sen} = \text{Cos} \times \text{tang} = \frac{\text{Cos}}{\text{Cot}}.$$

$$735. \text{ Cos} = \text{Sen} \times \text{Cot} = \frac{\text{sen}}{\text{tang}}.$$

$$736. \text{ Tang} = \frac{\text{sen}}{\text{cos}} = \frac{1}{\text{cot}}.$$

$$737. \text{ Cot} = \frac{\text{Cos}}{\text{sen}} = \frac{1}{\text{tang}}.$$

738.

738. $\text{Cot. A} \times \text{Tang A} = 1 = \text{Cot B} \times \text{Tang. B.}$

739. * I seni , e le tangenti sono linee rette , che ne' calcoli Trigonometrici si sostituiscono agli angoli dati , o cercati secondo i differenti casi ne' quali una , o altre di queste linee possono essere in proporzione co' lati de' triangoli , e nel conoscer questi casi consiste la scienza del Calcolo trigonometrico. *

Per fare questa sostituzione è stato bisogno far delle tavole de' calcoli fatti per trovare in un'occhiata il valore del seno , del coseno, della tangente , della cotangente di ciascun grado , e minuto di tutti gli angoli acuti possibili (imperocchè quei degli angoli ottusi si conoscono pe' loro supplementi.) . Queste tavole sono cognite sotto il nome di *tavole de' seni* . Vi si suppone , che il raggio del cerchio , che misura ciascun angolo sia $= 1$, e che vi sia dirimpetto a ciascun grado , e minuto il valore , in frazioni decimali , del suo seno, della tangente , del suo coseno , e della sua cotangente.

Ecco in poche parole sopra quai principj si costruiscono , o si possono costruire queste tavole .

Principj per la costruzione delle tavole de' seni .

740. **T** EOR. I. Conoscendo per un arco (fig. 57.) qualunque AB , una di queste quat.

quattro cose il suo seno, il suo coseno, il suo seno verso, il suo coseno verso, si ha quella delle tre altre, che si vogliono.

Imperocchè si vede (563) che $CD = \sqrt{CB^2 - BD^2}$, o sia, che $\text{cosen} = \sqrt{RR - \text{sen}^2}$. Che $DA = CA - CD$, o sia $\text{sen verso} = R - \text{cos}$. Che $HI = CH - CI$, o sia $\text{cosen verso} = R - \text{sen}$ &c.

741. TEOR. II. I calcoli fatti per un arco servono a trovare quello, che bisogna per la sua metà, o per lo suo doppio.

Imperocchè 1°. avendo tirata la corda BA, (fig. 60) e da C avendo abbassata la perpendicolare CE, per cagione delle cognite BD, DA, si ha (563) $BA = \sqrt{BD^2 + DA^2}$: così FA o sia $\text{sen } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\text{sen}^2 + \text{sen.v}^2}$. E $CF = \sqrt{CA^2 - AF^2}$. Dunque $\text{cosen } \frac{1}{2} = \sqrt{RR - \text{sen}^2 \frac{1}{2}}$. 2°. Riguardando AE come l'arco dato, i triangoli simili FCA, DBA danno $CA : CF :: AB : BD$; o sia $R : \text{cosen Arc} :: 2 \text{ sen Arc} : \text{sen Arco doppio}$.

742. TEOR. III. Essendo dati i seni (fig. 61) BD, KL di due archi AB, KB, si ha il seno KM della loro somma, o della loro differenza (fig. 62).

Imperocchè si ha (740) CD, e CL. Or $CB : CL :: BD : LP$ o sia OM : dunque $OM = \frac{\text{sen AB} \times \text{cosen KB}}{R}$; e accagione de' triangoli rettangoli simili KOL, OLQ, CMQ, CBD (fig. 61); e KOL, KMQ; CQL,
 Tomo II. Z CBD

CBD (fig. 62); ne' triangoli KOL , CBD si ha CB: CD :: KL: KO . Dunque $KO = \frac{\text{sen KB} \times \text{cosen AB}}{R}$, dunque in facendo $R = 1$,

$$KM \text{ o } \text{sen} (BK \pm AB) = \text{sen BK} \times \text{cosen AB} \pm \text{sen AB} \times \text{cosen KB} .$$

743. TEOR. IV. *La somma del seno KM (fig. 63) d' un arco KA minore di 30° , e del prodotto di $\sqrt{3}$ per lo seno KI della differenza fra quest' arco , e 30° , è uguale al seno FN d' un arco FA , ch' eccede tanto 30° , quanto l' arco KA è minore .*

Sia l' arco AB di 30° , e BF = BK , a cagione de' triangoli rettangoli simili SIF , SQG , l' angolo IFS = GQS = BCA = 30° . Dunque l' angolo KFG = 30° , dunque (729) $GK = \frac{1}{2} FK = IK = FI$. Or $FK^2 - GK^2 = FG^2$ (563) , o sia $4IK^2 - IK^2 = FG^2$. Dunque $3IK^2$ o sia $IK^2 \times 3 = FG^2$. Dunque estraendo le radici quadrate farà $IK \times \sqrt{3} = FG$, ed $IK \times \sqrt{3} + KM = FN$.

744. TEOR. V. *La somma del seno FT d' un arco HF minore di 60° , e del seno FI della sua differenza con 60° , è uguale al seno KO d' un arco HK , ch' eccede tanto 60° , quanto HF n' è minore .*

Imperocchè essendo $FI = IK = GK$ (743) si ha $FT + FI = KO$. Così per esempio $\text{sen } 55^\circ + \text{sen } 5^\circ = \text{sen } 60^\circ$.

745. Si possono trovare tutt' i seni per mezzo di questi teoremi . Imperocchè il seno di 30° essendo cognito (729) , per lo Teor.

I ,

I, e II. si possono avere i seni di 15° , poi di $7^\circ \frac{1}{2}$, indi di $3^\circ \frac{1}{4}$, e così in appresso, andando per le metà fino alla dodicesima operazione, che dà il seno di $52'' 44''' 3'''' \frac{1}{2}$, il quale è confuso senza errore sensibile col suo arco. E poichè i seni così confusi co' loro archi gli sono proporzionali, si farà, come quest' arco è al suo seno, così l' arco di $1'$ è al suo seno: avendo il seno di $1'$ si avrà (741) quello di $2'$, poi (743) quello di $3'$, quello di $4'$ &c. fino a 30° . Indi (743) da 30° fino a 60° , infine (744) da 60° fino a 90° . Dopo il che il calcolo delle tangenti è facile per mezzo di alcune delle formole dell' articolo precedente.

Principj per la Teoria del Calcolo Trigonometrico.

746. **TEOR. I.** *In ogni triangolo i seni degli angoli sono come i lati opposti.*

DIM. Avendo descritto un triangolo in un cerchio, ciascun lato è la corda di un arco doppio di quello, che misura l'angolo opposto (466). Dunque la metà di ciascun lato è (726) il seno dell'angolo opposto: Dunque le metà essendo come i tutti, ciascun lato è come il seno dell'angolo opposto.

747. **COROLL. I.** Il seno d'un angolo retto (727) essendo uguale al raggio, e il lato opposto essendo l'ipotenusa (485); In

un triangolo rettangolo il raggio è all'ipotenusa, come il seno d'uno degli angoli acuti è al lato opposto a quest'angolo.

748. COROLL. II. In un triangolo rettangolo il coseno d'uno degli angoli acuti è il seno dell'altro, dunque (746) il seno d'uno degli angoli acuti è al suo coseno, come il lato opposto a quest'angolo è all'altro lato. Ma (733) il seno è al coseno come la tangente al raggio: Dunque nel triangolo rettangolo la tangente d'uno degli angoli acuti è al raggio, come il lato opposto a quest'angolo acuto è all'altro lato.

749. COROLL. III. Conosciuti tre angoli d'un triangolo, non si può avere, che 'l rapporto de' lati, e non già i valori assoluti de' lati.

Imperciocchè tuttocciò, che si può dedurre dalla conoscenza di questi angoli, è che i tre lati opposti sono nel rapporto de' seni di questi angoli. E non si possono determinare questi lati di grandezza, poichè si possono costruire una infinità di triangoli dissimili, che siano simili, e che abbiano per conseguenza i loro angoli omologhi uguali.

750. TEOR. II. In un triangolo qualunque (fig. 64) ABC, si ha quest' analogia: Il lato maggiore AC è ad AB + BC somma de' due altri, come AB — BC loro differenza, è alla differenza de' segmenti AE, CE del più gran lato, formato per l'incontro della perpendicolare BE tirata dall'angolo maggiore B sopra il lato maggiore AC.

DIM. Imperocchè se dall'angolo B come centro, coll'intervallo del lato minore BC si descriva un cerchio GCD, e se si prolunghi AB in G, egli è chiaro che $AG = AB + BC$, e che $AP = AB - BC$; e poichè (448) $CE = ED$, si ha $EA - CE = AD$: Or (564), $AC : AG :: AP : AD$.

751. TEOR. III. In ogni triangolo rettangolo ABC (fig. 64) la somma $AB + BC$ di due lati qualunque è alla loro differenza, $AB - BC$; come la tangente della semisomma di due angoli A, C opposti a questi lati, è alla tangente della semidifferenza di questi due angoli.

DIM. Sia = P la semisomma de' due angoli A, e C. Sia = Q la loro semidifferenza. L'angolo maggiore C è dunque (232) $= P + Q$, e il minore A è $= P - Q$. Ciò posto (746) $AB : BC :: \text{sen } C : \text{sen } A ::$

$\text{sen } P + Q : \text{sen } P - Q$. O sia (742) $AB : BC :: \text{sen } P \times \text{cosen } Q + \text{cosen } P \times \text{sen } Q : \text{sen } P \times \text{cosen } Q - \text{cosen } P \times \text{sen } Q$. Dunque $AB + BC : AB - BC :: (304) \text{sen } P \times \text{cosen } Q + \text{cosen } P \times \text{sen } Q + \text{sen } P \times \text{cosen } Q - \text{cosen } P \times \text{sen } Q : \text{sen } P \times \text{cos } Q + \text{cos } P \times \text{sen } Q - \text{sen } P \times \text{cos } Q + \text{cos } P \times \text{sen } Q$. E riducendo, $:: 2 \text{sen } P \times \text{cos } Q : 2 \text{cos } P \times \text{sen } Q$, e dividendo per $2 \text{cos } P$ $\times \text{cos } Q$, $:: \frac{2 \text{sen } P \times \text{cos } Q}{2 \text{cos } P \times \text{cos } Q} : \frac{2 \text{cos } P \times \text{sen } Q}{2 \text{cos } P \times \text{cos } Q} :$

e riducendo, $:: \frac{\text{sen } P}{\text{cos } P} : \frac{\text{sen } Q}{\text{cos } Q} : o$ (736)

Z 3

tang

$$\begin{aligned} &:: \text{tang } P : \text{tang } Q : \text{Dunque } AB + BC : AB \\ &- BC :: \text{tang } P : \text{tang } Q :: \text{tang } \frac{A+C}{2} : \\ &\text{tang } \frac{A-C}{2}. \end{aligned}$$

752. SCOLIO. *Quest' analogia può ridursi a queste due: come il lato minore BC è al maggiore BA, così il raggio è alla tangente d' un angolo dal quale bisogna togliere 45°. Indi come il raggio è alla tangente del residuo, così la tangente della semisomma degli angoli A, e C è alla tangente della loro semidifferenza.*

Dim. Avendo preso $BP = PT = BC$ poi $PM = PA$, indi $TM = AB - BC$. Tirate BN , che faccia l'angolo NBA di 45° , e da' punti T, M , abbassate sopra BN le perpendicolari TK, MN , e congiungete KP . Allora i triangoli BKP, BKT, BNM sono rettangoli, isosceli, e simili, dunque $BK = KT, BP = PK = PT = BC$, e $BN = NM$. Ciò posto nel triangolo rettangolo PKM si ha (748) PK o $BC : PM$ o $AB :: R : \text{tang } PKM$. Da quest'angolo togliendo 45° , resta $TKM = KMN$. Or (748) $R : \text{tang } KMN :: MN$, o $BN : KN :: BM$, o $AB + BC : TM$, o $AB - BC :: \text{tang } \frac{A+C}{2} : \text{tang } \frac{A-C}{2}$ (751).

*Ufi della Teoria precedente per li Calcoli
Trigonometrici.*

753. **N**E' calcoli Trigonometrici non si fa ufo al prefente, che de' Logaritmi tanto de' fenì, cofenì, tangenti, e cotangenti, quanto de' numeri, ch'efprimono il valore de' lati: e però le tavole de' fenì che fono in ufo, contengono i Logaritmi de' fenì, cofenì, &c., e una tavola di Logaritmi di numeri naturali da 1, a 10000, o 20000, lo che bafte per la pratica.

754. Nelle tavole de' fenì fi fuppone il raggio, o feno totale = 10000000000, di modo che la caratteriftica del Logaritmo del raggio è 10, donde fi vede. 1°. Che per aggiungere il Logaritmo del raggio a un altro Logaritmo, bafte porre 1 avanti la caratteriftica di quefto Logaritmo, s'è al di fotto di 10, com'è ordinariamente, o d'aggiungere 1 alle decine di quefta caratteriftica, s' eccede 10: al contrario effendo dato un Logaritmo, per togliere il Logaritmo del raggio, bifogna togliere 1 dalle decine della fua caratteriftica.

755. Il°. Che i calcoli de' triangoli rettangoli, dove entra il raggio, che accade quafi in tutt' i cafi, come fi vedrà, fi riducono ad una femplice addizione di due Logaritmi, fe il raggio è al primo termine dell' analogia, o ad una femplice sot-

trazione di due Logaritmi se il raggio è nel secondo o terzo termine, lo che rende questi calcoli molto più corti; che quelli degli altri triangoli; imperocchè l'addizione, o la sottrazione di 1 non dev'essere posta in conto d'operazione.

Calcoli de' triangoli rettangeli.

756. **P**Er facilitar la pratica de' triangoli rettangoli noi supporremo, che si chiami A l'angolo retto (ch'è sempre stimato uno de' dati), che si chiami B uno degli angoli acuti, e C l'altro angolo, e si troverà nella tavola seguente l'analogia, o il calcolo, che bisogna fare in tutt' i casi.

Essendo dati	Tro- var	ANALOGIE, O REGOLE DEL CALCOLO.
1 2 3 AB, AC	BC B C	$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$ O $AB:AC::R:\text{tang } B$, poi $\text{sen } B:R::AC:BC$. $AB:AC::R:\text{tang } B$. $AC:AB::R:\text{tang } C$.
4 5 6 AB, BC	AC B C	$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$ O $\text{Log } AC = \frac{1}{2} \log(BC + AB) + \frac{1}{2} \log(BC - AB)$ $BC:AB::R:\text{cofen } B$. $BC:AB::R:\text{sen } C$.
7 8 9 AC, BC	AB B C	$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$ O $\text{Log } AB = \frac{1}{2} \log(BC + AC) + \frac{1}{2} \log(BC - AC)$ $BC:AC::R:\text{sen } B$ $BC:AC::R:\text{cofen } C$.
10 11 AB, B	AC BC	$R:\text{tang } B::AB:AC$ $\text{Cofen } B:R::AB:BC$.
12 13 AB, C	AC BC	$R:\text{Cotang } C::AB:AC$ $\text{Sen } C:R::AB:BC$.
14 15 AC, B	AB BC	$R:\text{cotang } B::AC:AB$ $\text{Seno } B:R::AC:BC$
16 17 AC, C	AB BC	$R:\text{tang } C::AC:AB$ $\text{Cofen } C:R::AC:BC$.
18 19 BC, B	AB AC	$R:\text{cofen } B::BC:AB$. $R:\text{sen } B::BC:AC$.
20 21 BC, C	AB AC	$R:\text{sen } C::BC:AB$. $R:\text{cofen } C::BC:AC$.

757. Tutte queste analogie non sono altro, che l'applicazione de' corollarj I, e II. (747, e 748) a tutt'i casi de' triangoli rettangoli.

La 1^a, 4^a, e 7^a Regola sono fondate su ciò, che (562) il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma de' quadrati de' due lati. Ma perchè il calcolo de' quadrati è incommodo, si sono sostituite alla prima regola due analogie; la prima per calcolare uno degli angoli, e la seconda per calcolare l'ipotenusa co' l mezzo di quest'angolo, e del suo lato opposto cognito. Si è sostituito alla 4^a, e alla 7^a una regola per li Logaritmi, che può essere espressa così.

La metà della somma de' Logaritmi della somma e della differenza dell'ipotenusa, e d' un de' lati, è il Logaritmo dell' altro lato. Ella è fondata sopra questo, che $(BC^2 - AB^2) = (BC + AB) \times (BC - AB)$: dunque (340) $\log (BC + AB) + \log (BC - AB) = \log AC^2 = 2 \log AC$ (342). Lo stesso è per $(BC^2 - AC^2)$.

Calcolo de' triangoli obliquangoli.

758. I. **E**ssendo dati due angoli, e un lato, trovare gli altri lati.

Come il seno dell' angolo opposto al lato cognito, A questo lato;

Così

363

*Così il seno dell' angolo opposto al lato richiesto,
 A questo lato cercato (746).*

759. II. Essendo dati due lati, e un angolo opposto a uno di essi, trovar l'angolo opposto all' altro, qualora si sappia prima se egli è acuto, ovvero ottuso.

*Come il lato opposto all' angolo dato ;
 Al seno di quest' angolo :
 Così l' altro lato ,
 Al seno dell' angolo , che gli è opposto.*

... Questa è l' inversa della precedente, col mezzo della quale si troverà, se si vuole, il terzo lato.

760. III. Essendo dati due lati, e l'angolo compreso; trovar gli altri angoli.

*Come la somma de' lati dati ,
 Alla loro differenza ;
 Così la tangente della semisomma degli angoli incogniti .
 Alla tangente della loro semidifferenza (751).*

Per esempio sia (fig. 64) AB 865 piedi, CB 517, e l'angolo ABC $96^{\circ} 36'$; per li logaritmi si farà

AB .. 865	ABC ... $96^{\circ} 36'$	
BC .. 517	Suppl ... $83^{\circ} 24'$	(è (491)
		(la somma
Som. 1382	Semi som. 41.42	(de' 2 ang.
		Diff.

364
 Diff. 348 ... log ... 2,54158
 Tang. 41° .. 42' .. 9,94986

Log. 1382 ... 3,14051

9,35093 log. tang.

la semidiff. 12° 39'
 la semisom. 41 42

l'ang. magg: 54 21
 l'ang. min. 29 3

L'angolo ACB opposto al lato maggiore AB, è il maggiore, ed è per conseguenza 54° 21', e l'altro angolo BAC è 29° 3'.

761. IV. *Essendo dati due lati, e l'angolo compreso trovare il terzo lato.*

Bisogna cercar gli angoli per la regola precedente, e il terzo lato per la prima (758).

762. V. *Essendo dati i tre lati trovare i tre angoli (fig. 64).*

Se si anno i tre lati AC, AB, BC per trovare un angolo qualunque, come A, bisogna prima far questa proporzione.

*Come il maggiore de' tre lati AC,
 E' alla somma degli altri due AB + BC ::
 Così la differenza degli altri due AB — BC,
 E' alla differenza AD de' segmenti CE, EA :*

del lato maggiore, fatti dalla perpendicolare BE tirata dal suo angolo opposto B.

Es.

Essendo dunque AC la somma de' segmenti CE, EA; e AD essendo la loro differenza, CE farà (232) uguale alla metà di AC — AD; ed EA farà uguale alla metà di AC + AD; e però ne' triangoli rettangoli CEB, BEA, si conosceranno i due lati BC, CE, e AB, AE; si potranno dunque trovare i valori degli angoli (756).



TRATTATO ANALITICO

DELLE SEZIONI CONICHE.

*Nozioni preliminari sulle curve in generale,
e sulla maniera d' esprimerne le principali
proprietà per l' analisi.*

763. **S**I chiama *funzione d' una quantità* tutto ciò, che la rende composta, o ciò, che impedisce di considerarla come semplice.

Per esempio chiamasi in generale funzione di a , una delle potenze qualunque di a , una radice qualunque, una somma, una differenza, un prodotto, un quoziente, &c., della quantità a .

764. Per determinare la posizione d' un punto sopra d' un piano, la maniera la più comoda, e la più usata da Geometri, è di rapportarlo a due rette differentemente situate
so-

sopra questo piano , locchè si fa facilmente , quando si conosce la sua distanza da ciascuna di queste rette , e da qual parte è egli situato riguardo a loro .

Come se il punto M (fig. 65) doves' essere situato al di sotto della retta AS data di posizione , ed esserne lontano per una quantità uguale a DE . E alla sinistra della retta SF a una distanza uguale a BC : allora tirando al di sotto di AS una retta GH che le sia parallela , e in maniera che tutte le perpendicolari tirate tra loro siano uguali a DE , egli è chiaro , che questo punto M dev' essere in qualche parte di questa retta : tirando similmente a sinistra di SF una parallela KI , tale che tutte le perpendicolari tirate fra loro siano uguali a BC , e sulla quale per conseguenza il punto M dè anche trovarsi ; egli è chiaro , che questo punto dev' essere nell' intersezione delle due rette KI , GH .

765. Se dando la distanza dal punto M alle due rette AS , SF , non si dicesse da qual lato questo punto doves' essere situato riguardo a loro , la sua posizione sarebbe indeterminata ; imperocchè si troverebbe ugualmente à quattro punti M , m , μ , $\mu\mu$; per evitar quest' ambiguità i Geometri son convenuti , che si disegnassero le posizioni opposte pe' segni $+$, $-$; per esempio , la retta AS servendo di termine per rapportarvi le rette che sono al di sopra , e al di sotto , si chiamerebbero alcune positive , e le altre negative ,

ve, e la retta SF fervendo di termine per distinguere quelle, che sono a sinistra da quelle, che sono a destra, si chiameranno quelle positive, e le altre negative. La scelta n'è la prima volta arbitraria, ma essendo una volta fatta non si dà più cangiarvi niente in tutt' i calcoli algebratici applicati alla stessa figura.

766. Se dal punto M determinato quì sopra, s'abbassino le perpendicolari MT, MR, i triangoli rettangoli MTU, MPR sono simili, poichè se dagli angoli retti TMP, UMR si toglie l'angolo commune TMR, resta $TMU = PMR$. Si ha dunque $MU : MP :: MT$, o $DE : MR$, o BC . Dunque alle perpendicolari MT, MR che misurano le distanze date, si posson sostituire le parallele MU, MP, e determinare il punto M per queste condizioni, ch'egli dev'essere al di sotto di AS, e a sinistra di SF, e che le parallele ad AS, e a SF tirate da questo punto debbono essere uguali l'una ad MP, l'altra ad MU. Imperocchè avendo preso sopra SP, al di sotto di AS, una parte $SP = MU$, e per P avendo tirata ad AS la parallela GH, non s'avrebbe a far altro, che dal punto P tirarvi una retta uguale a PM e'l punto M sarebbe perfettamente determinato come sopra.

767. Si considera ordinariamente una curva piana come una serie di passi uguali, notati da un punto mobile sopra d'un piano; e perchè si possa ragionar sulla natura, e le proprietà di questa curva, bisogna, che que-
sta

sta serie di passi sia una serie di punti M , M (fig. 68) determinati d'una maniera uniforme riguardo alle rette AS , SF differientemente situate sù questo piano, o che qualche istessa funzione di ciascuna retta MP sia a qualche istessa funzione della retta SP corrispondente, in un certo rapporto costante: per questo dunque bisogna, che il punto mobile, che descrive la curva si muova sempre, secondo una certa istessa legge, negli angoli infinitamente piccoli de' suoi traviamenti.

L'equazione algebrica, ch'esprime questa legge, o il rapporto costante di ciascuna MP a ciascuna SP , si chiama l'*Equazione alla curva*: la retta SF , alla quale terminano tutte le parallele MP , MP , si chiama *la linea delle ascisse*, poichè *ascisse*, o *divise* si chiamano le parti SP , SP , &c. di questa linea comprese dopo il punto determinato S (che si chiama l'*origine delle ascisse*) per lo quale passa la retta AS , e alla quale tutte le rette MP (che si chiamano le *ordinate*, o le *apPLICATE*) deggiono esser parallele. Onde si vede, che ove si sappia la posizione d'una delle ordinate, e l'origine delle ascisse, la retta AS è inutile.

768. Per ischiarir tuttocciò, supponghiamo, che sMS (fig. 69) sia un semicerchio, del quale Ss sia il diametro. Si sà, (565) che se da un punto qualunque M si cali ad esso la perpendicolare MP , si ha $MP^2 = SP \times Ps$. Se dunque si prenda Ss per la linea del-

delle ascisse, il punto S per loro origine, l'equazione al cerchio dev' esprimere, che il quadrato di ciascuna ordinata MP è uguale al prodotto di ciascun' ascissa SP per lo resto Ps del diametro. Così facendo $Ss = a$, $MP = y$, $SP = x$; (notate, che ordinariamente si disegnano per y le ordinate delle curve, e le loro ascisse per x , in modo, che nel discorso familiare si dice le x , e le y d'una curva, per dir le sue ascisse, e le sue ordinate); si ha $Ps = a - x$, ed $yy = aa - xx$ è l'equazione al cerchio, poichè ella esprime l'uguaglianza costante tra una stessa funzione di ciascuna ordinata, (cioè il suo quadrato), e una stessa funzione di ciascun' ascissa corrispondente, (ch'è il suo prodotto per lo resto del diametro).

769. Da ciò si vede, che ciascuna ordinata d'una curva, e ciascun' ascissa corrispondente, debbono essere due quantità indeterminate, o variabili, ma che l'una si possa didurre dall'altra per le diverse supposizioni di grandezze, che si fanno a una delle due, e per le grandezze determinate, o costanti, che sono contenute nella Equazione, onde si può facilmente descrivere la curva. Per esempio nell'equazione del cerchio, a dè essere una quantità costante, o invariabile, se dunque $a = 10$, e se sopra Ss si prendono quante si vogliono ascisse SP (si prendano per maggior comodo in progressione aritmetica, o in maniera, che gl'intervalli PP

Tomo II.

A a

siano

siano uguali) ; come se si facesse SP , ovvero x , successivamente $= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, si troverà per l'equazione $yy = ax - xx$, che le ordinate corrispondenti MP , o y sono successivamente $0, 3, 4, \sqrt{21}, \sqrt{24}, 5, \sqrt{24}, \sqrt{21}, 4, 3, 0$, in maniera, ch' elevando da ciascun punto P le perpendicolari ad Ss , e facendole successivamente uguali a $3, 4, \sqrt{21}$, &c., s' avranno tanti punti M , per li quali si potrà far passare una curva, che sarà un semicerchio descritto con tanta maggiore esattezza, quanto meno le ordinate MP faranno distanti una dall' altra.

E perchè $yy = ax - xx$ dà le radici negative $-3, -4, -\sqrt{21}, -\sqrt{24}$, &c., come anche le positive, $3, 4, \sqrt{21}, \sqrt{24}$, &c., si vede, che se sopra ciascuna MP prolungata, si prendano (765) a destra di Ss , tante $Pm = PM$, s' avrà il cerchio intero $SMsm$.

Si vede ancora, che se si avesse voluto prendere SP maggiore di Ss , o x maggiore di a , l'ordinata corrispondente sarebbe divenuta immaginaria, o impossibile ; imperocchè $ax - xx$ sarebbe divenuta una quantità negativa, la cui radice quadrata è impossibile (242). Così il semicerchio è assolutamente terminato in Ss , e il ramo SMM non può discendere più basso.

770. Reciprocamente. Poichè tutte le soluzioni possibili d' un problema indeterminato sono

sono (235) rinchiusa in una equazione , che contiene due incognite , si può supporre , che tutt' i valori possibili d' una di queste incognite sieno rappresentati successivamente per una serie d' ascisse d' una curva , e tutt' i valori corrispondenti dell' altra incognita per le ordinate della medesima curva ; in maniera , che ciascun punto della curva sia tale , che la sua ordinata , e la sua ascissa rappresentino una delle soluzioni esatte del problema indeterminato espresso per questa equazione .

771. I differenti gradi d' equazioni servono per stabilire i differenti generi , o ordini di linee ; ciascuna combinazione delle funzioni delle due indeterminate d' una equazione d' un certo grado serve a distinguere altrettante specie di linee rinchiusa nel genere indicato dal grado : il numero di queste combinazioni possibili , e realmente differenti determina il numero di queste specie . Così si chiamano *linee del primo genere* , o *del primo ordine* , quelle , la cui equazione è del primo grado ; *linee del secondo genere* , o *del secondo ordine* , quelle , la cui equazione è del secondo grado , e così delle altre .

Ei non v' ha che la sola linea retta , che sia del primo genere ; non v' ha , che le quattro sezioni coniche , che sieno del secondo ; ma ve ne sono quasi 80 del terzo ; e a proporzione un più gran numero del quarto , &c. . Ciò si dà intendere solo delle curve , che si chiamano *piane*, e *geometriche* ; imperocchè così

si chiamano quelle, le cui ascisse, e le ordinate sono linee rette, e delle quali il rapporto può essere determinato geometricamente, cioè a dire, che non contengono espressioni di grandezze, che non an potuto essere misurate geometricamente, come sarebbero rette uguali ad archi di cerchio: altrimenti, cioè a dire, se le ordinate, o le ascisse non fossero rette, o se, essendo rette, si fosse in obbligo di far entrare nelle loro espressioni rette uguali ad archi di cerchio, la curva sarebbe *Mecanica*, o *Trascendente*; e se la curva non è piana, cioè se il punto, che l'ha formata non è mosso in uno stesso piano, la curva si chiama *Curva a doppia curvatura*.

772. Se la curva piana MSm (fig. 66) o geometrica, o meccanica è tale, che le ordinate essendo prolungate al di là della linea SF delle ascisse sino alla curva in m , si abbia sempre $Pm = PM$, questa linea SF si chiama *un diametro*, il punto S della curva, per dov'esso passa, s'appella l'*origine del diametro*, questo punto è ordinariamente l'origine delle ascisse. E se le ordinate sono perpendicolari a questo diametro, si chiama allora l'*Asse della curva*.

773. Tutte le curve, che anno un diametro, e che per conseguenza anno in riguardo a quello due rami SMM , Smm , che si estendono dall'una, e l'altra parte nella stessa maniera, anno questa proprietà, che la parallela SA alle ordinate tirate dall'origine S del diametro.

metro, tocca la curva in questo punto S. Imperocchè, poichè il diametro passa sempre per mezzo tra le due porzioni della doppia ordinata terminata dall'una, e l'altra parte alla curva, se s'immagini, che Mm scorra parallelamente a se stessa fino a ch' essa arrivi in S, allora il punto S sarà nel mezzo fra le due parti infinitamente piccole di Mm , che saranno terminate alla curva; e perchè Mm entra infinitamente poco nella curva, le sue parti terminate alla curva, saranno le due metà del lato infinitamente piccolo della curva, ch'è in S. Dunque Mm si confonderà allora con questo lato: ma una tangente non è altro che il prolungamento finito d'un lato infinitamente piccolo; dunque la parallela alle ordinate tirata dal punto S, è il prolungamento finito del lato infinitamente piccolo, ch'è in S; dunque ella è tangente alla curva in questo punto.

774. Quando un diametro, o un'asse SP (fig. 93. e 94.) è incontrato da una tangente MT, la parte TP di questo diametro compresa tra'l punto dell'incontro T, e l'ordinata MP a questo diametro tirata dal punto del contatto M, si chiama la *sottangente*. E se per lo stesso punto del contatto M s'innalzi alla tangente MT una *perpendicolare*, o *normale* MN, la parte PN compresa tra l'incontro dell'ordinata, e quella della normale, si chiama la *superperpendicolare*, o *funnormale*.

775. Quando la curva non è rientrante

Aa 3

per

per rapporto al suo diametro ; cioè a dire , quando i suoi rami se ne scostano sempre , allora si possono tirare da tutt' i suoi punti M , M , &c. (fig. 66) le rette MQ , MQ parallele al diametro SP , fino a che s' incontrino con la retta SQ , tirata dall' origine S delle ascisse parallelamente alle ordinate, in maniera, che queste rette MQ , MQ siano tutte al di fuori della curva . In questo caso egli è chiaro, ch' esse formano parallelogrammi simili PQ , PQ , &c., e che si possono prendere le rette MQ , MQ per le ascisse SP , SP , e le rette SQ , SQ per le ordinate . Queste sorti di ordinate si chiamano le *coordinate*, il parallelogrammo PQ si chiama il *parallelogrammo delle coordinate*, e l' angolo QSP , l' *angolo delle coordinate*.

776. Poichè si suppone , che le curve non sono altro , che passi uguali d' uno stesso punto , che devia dopo ciascun passo seguendo una certa legge costante nella variazione degli angoli infinitamente piccoli de' suoi deviamenti, ne segue . 1°. *Che non si può considerare in Geometria la linea mista*, cioè a dire in parte retta , e in parte curva: poichè allora ei non vi sarebbe legge costante nella traccia del punto , che la descriverebbe.

777. 2°. *Che il contatto d' una curva con una linea retta si dà fare in un solo punto*, o che una retta non può toccare una curva in due , o tre punti contigui: imperocchè se ciò fosse possibile, il punto descrivente avrebbe fatti due , o
tre

tre passi senza deviare, lo che avrebbe interrotta la legge de' suoi deviamenti.

778. 3°. *Che la curvatura d'una curva è tanto più grande, quanto più grandi sono gli angoli de' suoi deviamenti a proporzione della grandezza de' passi del punto mobile, che l'ha descritti.*

Per esempio, un cerchio è una curva descritta da un punto, che travia sempre ugualmente a ciascun passo uguale: e perchè un cerchio grande, e un piccolo sono due poligoni regolari d'uno stesso numero di lati, e d'angoli, ma de' quali quelli del più piccolo cerchio sono più piccoli di quelli del più grande nella ragione de' loro raggi; gli angoli de' deviamenti, o i supplementi degli angoli interiori formati da' lati del cerchio maggiore, sono uguali agli angoli de' deviamenti de' lati del minore; egli è dunque evidente, che ciascun de' lati del cerchio maggiore è tanto meno discosto dalla linea retta, quanto egli è più grande, o quanto il raggio del cerchio è più grande, poichè il punto, che descrive il cerchio grande fa i passi in linea retta altrettanto più grandi: dunque *la curvatura d'un cerchio è tanto più piccola, quanto il suo raggio è più grande, ovvero ella è in ragione inversa del suo diametro.* Onde segue, che *la grandezza del raggio d'un cerchio è una quantità propria a dare un'idea della sua curvatura.*

779. I principali problemi, che uno si deve proporre, quando si ha da esaminare una

curva, consistono, 1°. a determinare in qual modo si debba descrivere, qualora se ne conosca l'equazione; o reciprocamente qual equazion si dè dedurre dalla sua costruzione conosciuta. 2°. Come vi si può tirare una tangente in un punto dato; Ch'è lo stesso, che cercare qual'è la situazione del lato infinitamente piccolo, ove questo punto è situato; o anche qual'era la direzione del traviamiento del punto mobile nel descriver questo lato infinitamente piccolo. Questa ricerca conduce naturalmente a quella del punto del contatto, che si determina facilmente da' valori della sottrangente, della normale, o della funnormale. 3°. Qual'è la curvatura della curva in un piccolo arco dato. A far ciò si suppone, che per li tre punti infinitamente prossimi, che formano quest'arco, siasi fatta passare la circonferenza d'un cerchio, nella quale per conseguenza si confonde l'arco della curva, e 'l raggio di questo cerchio determinato per mezzo dell'equazione, o delle proprietà della curva, dà la curvatura di quest'arco. Questo raggio chiamasi *raggio di curvatura*, *raggio d'oscuro*, *raggio della evoluta*. 4°. Si cerca qual'è la quadratura della curva, cioè qual'area, o superficie è racchiusa nella curva intera, s'essa è chiusa, o in una delle sue parti date; come se si domandasse la superficie compresa fra l'arco LM (fig. 67) d'una curva, una parte CP del suo diametro, e le sue due ordinate MP, CL, delle quali una, come CL, par-

parte dall' origine C delle x dell' equazione della curva. Perciò si suppone, che dopo questa origine si siano disposti parallelamente all' ordinata CL, o MP tanti parallelogrammi $pqmn$ terminati alla curva da una parte, e dall' altra alla linea delle ascisse CP, quanti punti vi sono da C sino a P; tutti questi parallelogrammi, che sono infiniti di numero sono dunque così stretti, che le rette pm , qn si confondono, e che possono esser prese per semplici ordinate al diametro CP. Or CP essendo l' ultima x , tutte le x comprese fra l' origine C, e che corrispondono a ciascuna di queste ordinate comprese fra CL, e PM, crescono secondo questa serie, o progressione arimmetrica;

$$1 \frac{x}{\infty}, 2 \frac{x}{\infty}, 3 \frac{x}{\infty}, 4 \frac{x}{\infty} \dots \infty \frac{x}{\infty} = x$$

Poichè la prima y infinitamente prossima a CL ha per sua x una parte infinitamente piccola di CP, cioè $1 \frac{x}{\infty}$; la seconda ha la sua

x doppia della precedente, poichè ella corrisponde al secondo punto compreso tra C, e P, e contato dopo C; questa x , è dunque

$2 \frac{x}{\infty}$: la terza y ha la sua x tripla, ovvero

$3 \frac{x}{\infty}$, e così delle altre; ond' è chiaro, che

si possono rappresentare tutte queste x per la serie infinita $\div 1. 2. 3. 4. \dots x$. Or l' equazione alla curva non racchiudendo altre indeterminate, che x , e y , si possono prendere
tanti

tanti valori di y , quanti se ne posson supporre a x , cioè a dire, quanti termini vi sono in questa serie: dunque s'avrà per questo mezzo una serie infinita d'ordinate comprese tra CL, e PM; e se si può sommar questa serie, s'avrà la quadratura esatta dell'area CMLP: se non si può sommare, e se questa serie è assai convergente, se ne avrà la quadratura a un di presso, e tanto più esattamente, quanti più termini successivi di questa serie d'ordinate si sommeranno.

Per riuscire in tutte queste ricerche, s'impiegano ordinariamente due sorti di calcoli, l'uno, ch'è il calcolo analitico ordinario, e l'altro che si chiama *infinitesimale*. Se ne daranno i principj in appresso.

*Della natura, e delle proprietà principali delle
sezioni coniche descritte sopra un piano,
e considerate in rapporto
a' loro assi.*

780. **I**O chiamo *Sezione Conica* (fig. 70. 71. 72.) ogni linea, nella quale sieno sempre nella stessa ragione le due distanze di ciascuno de' suoi punti, una MG dalla retta AG (che io chiamo *la direttrice della sezione*), e l'altra MF da un medesimo punto F preso fuori di questa retta AG; (il qual punto s'appella *il foco della sezione*).

781.

781. La sezione è una *Ellissi* se MG è maggiore di MF ; dicesi *Iperbole* se MG è minore di MF ; s'appella *Parabola*, se MG è uguale a MF ; un *cercio*, se MG è infinita per rapporto a MF : e finalmente una *retta*, se MG è infinitamente piccola per rapporto a MF . Noi quì considereremo solamente le tre prime, che risguardano le curve, che propriamente si chiamano *Sezioni Coniche*.

782. Una retta FA , che passa per lo foco F , e ch'è perpendicolare alla direttrice AG , si chiama l'*asse principale* della Sezione. Il punto S compreso tra F , e A , e ch'è tale, che SA sia a SF nello stesso rapporto costante proprio della sezione, s'appella il *vertice* della sezione, ovvero l'*origine*, l'*estremità* dell'asse principale.

783. Onde segue, che una *sezione conica* è una *ellissi*, una *iperbole*, o una *parabola*, come il suo vertice è più vicino, più lontano, o ugualmente lontano dal foco, quanto la direttrice.

784. Essendo date di posizione la direttrice AG , il foco F , e l' vertice S , per trovare quanti punti della sezione si vogliano, e per conseguenza per descrivere la curva, bisogna dal vertice S innalzare perpendicolarmente all'asse una retta $SB = SF$, tirar la retta indefinita ABD , e avendo tirate quante si vogliano rette, PD , PD , PD , &c., perpendicolari all'asse, e anche tanto di quà, quanto di là dal vertice S , si dè notare, sempre ch'è possibile, un punto M tale, che
cia-

ciascuna FM sia uguale a ciascuna PD ; indi si d' uopo prender dall' altro lato dell' asse sopra la PD prolungata un' altro punto m , tale , che faccia $Pm = PM$, e far passare una curva per tutt' i punti M , M , m , m , che sarà la sezione , che si cerca . Imperocchè , se da uno di questi punti , si abbassi sulla direttrice la perpendicolare MG , a cagione de' triangoli simili ASB , APD , si ha PD , o FM : PA , o MG :: SB : o SF : SA .

E perchè i punti m , m , sono situati sulle stesse rette , e alle stesse distanze dall' asse , che i punti M , M ; quello che si dirà del ramo SMM , si dà intendere anche del ramo Smm , che gli è uguale , e simile , e che ha per conseguenza tutte le stesse proprietà . Da questa costruzione si deducono facilmente le seguenti proprietà .

785. I. *Nella Parabola l' angolo SAB è di 45 gradi , nell' Ellissi egli è più piccolo , e nell' Iperbole è più grande .*

786. II. Sempre che le FP sono minori delle PD , si potranno determinare sopra le PD i punti M della curva ; perchè le PD devono (784) essere uguali alle FM , le quali sono le ipotenuse de' triangoli rettangoli FPM , e per conseguenza maggiori del lato FP . Donde si vede , che , se una retta FP è uguale alla retta corrispondente PD , il punto M cadrà sul punto P , ch' è nell' asse : e che , se le FP sono maggiori delle loro PD , vi sarà impossibile di determinare il punto M .
Ciò posto

Nell'

Nell' Ellissi (fig. 70) le rette AP crescono più rapidamente delle loro PD, poichè AS è maggiore di SB (784): dunque le rette FP, che sono al di là del foco F rispetto al vertice S, devono uguagliare, e indi superare le loro corrispondenti PD: sia $FP''' = P'''D'''$, allora il punto M''' cade sull' asse, e ivi ferma la curva. Imperocchè, se si prendesse una PD al di là di $P'''D'''$, o anche tra A, e SB, essa sarebbe troppo corta, onde non vi si potrebbe notare un punto M, il quale dasse $FM = PD$. Dunque l'Ellissi è una curva, i cui rami SMM, Smm vanno prima allargandosi dall' una, e l' altra parte dell' asse, e poi si restringono, e si ricongiungono in s, in maniera che il suo asse principale viene a terminare in questo punto s, che diventa un' altro vertice dell' Ellissi.

787. Nell' Iperbola (fig. 71) poichè AS è più piccola di SB, le rette AP crescono meno delle loro corrispondenti PD: Sicchè niuna FP presa al di là di F per rapporto alla direttrice, può diventare uguale alla sua PD, in maniera che i rami SMM, Smm dell' Iperbole si scostano all' infinito dall' una, e l' altra parte dell' asse SP. Ma se, avendo prolungato BA verso H, si prendano le FP al di là della direttrice, elleno prima sono più grandi delle loro PD; ma comechè queste PD crescono più rapidamente delle loro FP, si arriverà subito ad averne una, come FP''' , uguale a $P'''D'''$; s'avranno indi le FP minori delle PD. Ma, poichè $FP''' = P'''D'''$, il punto

P

P''' appartiene all'Iperbole ; perchè allora i triangoli rettangoli simili $D'''P'''A$, ASB danno questa proporzione $P'''A : P'''F$, o $P'''D''' :: AS : SB$. E poichè le PD , che sono al di là di $P'''D'''$ crescono sempre , e divengono sempre più grandi a riguardo delle loro FP , possono segnarvisi i punti μ tali , che le $F\mu$ siano uguali a queste PD , il che forma dall'una parte , e dall'altra dell'asse due nuovi rami iperbolici infiniti , che appartengono al foco F , e alla direttrice AG , e la retta SP''' , o Ss diviene un asse commune , e determinata la sua lunghezza tra vertici S , s , di queste due iperboli opposte .

788. Nella Parabola (fig. 72) poichè $AS = SB$, e per conseguenza $AP = PD$, le FP prese di quà dal punto S per rapporto alla direttrice , sono necessariamente più lunghe delle loro PD , e le FP , che sono al di là , sono sempre più corte : dunque si può avere un'infinità di punti M sopra altrettante PD , che sono di là del vertice S , e la parabola è una curva composta solamente di due rami uguali , e che camminano all'infinito allontanandosi sempre più dall'asse .

789. III. Essendo date (fig. 70. 71. 72) la direttrice AG , il foco F , e'l vertice S d'una sezione conica , per sapere s'essa dà avere un'asse terminato , e per conseguenza un'altro vertice s ; bisogna per lo foco F far passare una retta indefinita FH , che faccia con l'asse un angolo di 45 gradi ; e dal punto H ,

H, ov' ella incontra la retta AB (prolungata s'è necessario) bisogna menare sopra l'asse la perpendicolare Hs, che terminerà l'asse in s, e darà l'altro vertice della sezione. Imperocchè allora il triangolo rettangolo F_sH è isoscele, dunque $Fs = sH$, e si ha $sA : sH$, o $sF :: SA : SB$, o FS . Dunque il punto s è un punto della curva, ch' è nel suo asse: dunque egli è l' vertice della sezione.

790. Donde si vede, che l' *Ellissi*, e l' *Iperbole* anno sempre un asse Ss determinato di grandezza: poichè quest' asse si determina nell' ellissi al di là del foco F per rapporto al vertice S, perchè l' angolo SAB è minore di 45 gradi (785). E nell' iperbole egli si determina all' opposto, perchè l' angolo SAB è maggiore di 45°. Ma nella parabola l' asse è infinito, perchè FH è parallela ad AB, e non la può incontrare, che ad una distanza infinita dall' una, o dall' altra parte verso A, o verso D.

791. IV. Se sull' asse Ss prolungato si prenda $sa = SA$ (fig. 70. 71). e se sopra quello di P'''D''' si prenda $sb = SB$, la retta indefinita abd , farà parallela ad ABD, per cagione degli angoli alterni uguali SAB, sab , e le parallele Dd , Dd , &c. faranno tutte uguali all' asse principale Ss . Imperocchè nell' Ellissi l' asse $Ss = sF + FS = sH + sb = bH$. E nell' Iperbole $Ss = sF - FS = sH - sb = bH$. Or tutte le dD sono uguali a bH .

792. Si può dire anche, che prendendo due PD ugualmente lontane da' vertici S, s
fi

fi ha $Ss = DP \pm Pd$. Cioè a dire nell'Ellissi l'asse principale Ss è uguale alla somma delle due PD , che sono ugualmente lontane da' due vertici S, s ; poichè le PD , che sono tra SB, sH , e ad uguali distanze, sono in proporzione arimmetica. E nell'Iperbole l'asse principale Ss è uguale alla differenza delle due PD , che sono ad uguale distanza da' vertici S, s .

793. V. Donde segue, che le ordinate, che sono ugualmente lontane da' vertici S, s , sono uguali, per cagione de' triangoli rettangoli aPm, APM , che sono allora uguali, avendo gli angoli uguali in A, a , e i lati AP, aP anche uguali.

794. VI. Ei segue ancora, che se si tiri ay parallela ad AG , e se si prenda sopra Ss un punto f , tale, che $sf = SF$, l'ellissi, e l'iperbole avrebbero potuto essere descritte per mezzo del punto f come foco, e della direttrice ay , come lo sono state per mezzo del foco F , e della direttrice AG .

795. VII. E' segue ancora, che $Ss = FM \pm fM$ (il segno $+$ è per l'Ellissi, e $-$ per l'Iperbole); Imperocchè ciascuna FM è uguale alla sua PD , e ciascuna Mf alla PD , ch'è tanto lontana dal vertice S , quanto la PD , sulla quale il punto M è situato, è lontana dal vertice s . Or in questo caso (792) $PD \pm PD = Ss$: dunque $MF \pm Mf = Ss$.

796. VIII. Si può dunque dire, che l'ellissi

lissi è una curva, nella quale la somma delle due distanze di ciascuno de' suoi punti da due punti fissi, è sempre costante, o uguale al suo asse principale: e l'iperbole è una curva, nella quale la differenza di due distanze di ciascuno de' suoi punti da due punti fissi, è costante, o uguale al suo asse principale.

797. Quindi si cava una maniera molto semplice di descrivere una grand' Ellissi sul terreno. Piantate due pali F, f (fig. 70) nel luogo, ove anno da essere i due fochi: vi s' avvolga una corda $FfMF$, i cui estremi siano uniti; si faccia girare intorno a questi pali un punto M , che tenga sempre tesa la corda; questo punto disegnerà un' Ellissi. Poichè sia il punto in S , allor egli è chiaro, che la corda è uguale a $2Ff + 2SF$, o a $2Ff + SF + sf$, cioè a $Ss + Ff$: ma frattanto tutto il movimento della parte Ff della corda non misura, che la distanza de' fochi: dunque il resto, ch'è uguale a Ss , misura la distanza di ciascun punto della traccia a ciascun de' due fochi; dunque ciascun punto è nell' Ellissi.

798. IX. Da ciò, che s'è detto qui sopra (793) segue ancora, che si ha $Ss : Ff :: SA : SB$. Imperocchè $sA : sF :: SA : SB$. Dunque $sA \mp SA$; o $Ss : sF \mp SB$, o $Ff :: SA : SB$: il segno $-$ è per l' Ellissi, e $+$ per l' Iperbole.

799. X. E' segue ancora (fig. 70), che le doppie ordinate mM all' Ellissi vanno crescendo da ciascun vertice S, s , fino a quella, ch'è nel mezzo fra esse, la qual'è per

conseguenza la maggiore di tutte, e misura la larghezza maggiore dell'Ellissi (come Ss ne misura la lunghezza): e però si chiama l'asse piccolo, o il secondo asse dell'Ellissi, e questa è la retta $m''CM''$: il punto C ov' ella incontra l'asse maggiore Ss , s'appella il centro dell'Ellissi: dove si vede facilmente, 1°. che l'asse minore divide in due ugualmente tutto lo spazio racchiuso nell'Ellissi, come anche l'asse maggiore: e che così l'Ellissi è divisa in quattro parti uguali da' due suoi assi. 2°. Ch' essendo dati l'asse maggiore Ss , e i due fochi F, f , per determinare l'asse minore, bisogna dividere Ss in due ugualmente per una perpendicolare $d''D''$, e terminarla dall'una, e dall'altra parte in m'' , e M'' , tirandovi da uno de' due fuochi una retta, come FM'' , uguale alla metà dell'asse maggiore. Imperocchè $M''F = M''f$ per cagione de' triangoli rettangoli uguali FCM'' , fCM'' , e si ha $M''F + M''f = Ss$. 3°. Reciprocamente, essendo dati i due assi, per trovare i fochi; bisogna dall'estremità dell'asse minore tirare dall'una, e l'altra parte sopra l'asse maggiore una retta uguale alla metà dell'asse maggiore.

800. Nella Iperbole (fig. 71) le doppie ordinate vanno anche crescendo da ciascun vertice S, s , fino all'infinito: e per conservar l'analogia tra l'Ellissi, e l'Iperbole, si chiama centro dell'Iperbole il punto G , ch'è nel mezzo tra i vertici S, s : l'asse Ss , s'appella
la

la *primo asse*, *asse principale*, *asse trasverso*; e si chiama, *secondo asse*, *asse retto* la retta IGL perpendicolare al primo asse, e terminata in I , L tirandovi dall'uno de' vertici S , o s , una retta SL uguale alla metà FC dell'intervallo Ff de' fochi. Onde si vede facilmente, ciò, che bisogna fare per determinare i due fochi, quando si anno i due assi.

801. La doppia ordinata, che passa per lo foco d'una sezione conica, si chiama il *parametro* dell'asse principale della sezione.

802. XI. Dalla costruzione generale delle sezioni coniche segue ancora, che tutte quelle della stessa spezie, per esempio, tutte l'ellissi, che saranno costrutte in maniera, che le distanze AS de' loro vertici dalle loro direttrici, siano proporzionali alle distanze SF di questi stessi vertici dal foco il più prossimo, tutte queste sezioni, io dico, saranno figure simili. Imperocchè allora tutte le AP , le PD , o le FM d'una sezione saranno proporzionali alle AP , alle PD , o alle FM omologhe nell'altra, e per conseguenza tutte le dimensioni omologhe di queste due sezioni saranno proporzionali, ciò che le renderà figure simili.

803. COROL. I. Due ellissi, o due iperboli sono simili, quando gli assi dell'una sono proporzionali agli assi dell'altra, o quando le distanze de' vertici sono proporzionali agl'intervalli de' fochi.

804. COROLL. II. Tutte le parabole sono
Bb 2 figu-

figure simili , perchè si ha sempre $AS = SF$ (fig. 72).

805. PROBLEMA I. *Tirate una tangente a un punto M dato in una sezione conica (fig. 76. 77.).*

SOLUZIONE. Per li due fochi F, f della sezione , e per lo punto dato M , fate passare due rette indefinite FM, fM . Tirate una retta TM , che divida in due ugualmente l'angolo FMm , nel quale la curva si trova compresa ; questa retta sarà la tangente , che si cerca .

DIM. Co'l punto M , come centro , e co'l raggio MF , descrivete l'arco Fm , che misura l'angolo FMm : Egli è chiaro , che $fm = Ss$, poichè $fm = Mf \pm MF$. Or se da un punto qualunque A preso sopra TM , diverso dal punto M , si tirino Af, AF, Am , si avrà (411) $AF = Am$; dunque $Af \pm AF = Af \pm Am$. Ma (fig. 76) nell'Ellissi , $Af + Am$ eccede fm (494) , il che fa vedere , che il punto A esce fuori della curva (795) : e nella Iperbole , se s'avesse $Af - Am = fm$, (ch'è necessario (795) , perchè il punto A appartenga all'Iperbole) , s'avrebbe $Af = Am + fm$, ch'è impossibile (545) : Dunque il solo punto M della retta TM appartiene alla sezione .

806. SCOLIO I. *Si può applicare la precedente soluzione alla parabola , facendo passare per lo punto dato M (fig. 78) una retta MF , e un'altra Mm parallela all'asse , e per conseguenza stimata parte dell'altro foco , ch'è a una di-*
stan-

stanza infinita del foco F , e dividendo in due ugualmente l'angolo FMm .

807. COR. I. L'angolo bMf al punto del contatto (fig. 76. 78.) tra la tangente Mb , e una retta Mf , diretta a uno de' fochi, è sempre uguale all'angolo FMT tra la tangente, e la retta MF tirata all'altro foco. Nell'Iperbole (fig. 77) $bMf = bMF$, ch'è sempre la stessa espressione.

808. COR. II. La corda Fm è sempre divisa perpendicolarmente dalla tangente, e in due parti uguali KF , Km .

809. OSSERVAZIONE. In tutto questo trattato noi chiameremo *ascisse* d'una ordinata a un'asse, o in generale a un diametro, la distanza di ciascuna estremità di questo diametro al punto, ove l'ordinata incontra questo diametro, o esso prolungato: così l'ellissi, il cerchio, e l'iperbole an sempre due ascisse per ciascuna ordinata. Ma comechè non si possono disegnare per x queste due differenti ascisse, noi designeremo per x , e chiameremo *ascissa* una parte del diametro compresa fra l'ordinata, e un punto determinato sopra questo diametro, il qual punto si chiamerà l'*origine delle ascisse*.

810. PROBLEMA II. Determinare l'equazione, che racchiude il rapporto tra le funzioni delle ordinate, e quelle delle loro ascisse, contando le ascisse dal vertice.

SOLUZIONE. Sia nell'ellissi (fig. 76) $Ss = 2a$, $Ll = 2b$, SF , o $sf = c$, $SP = x$,
 Bb 3 PM

$PM = y$: dunque $Ps = 2a - x$, $PC = a - x$, $PF = x - c$, $CF = a - c$, $Ff = 2a - 2c$, e $Pf = 2a - c - x$. Nel triangolo rettangolo F/C si ha (562) $Ff^2 = FC^2 + Cc^2$, ovvero $aa = aa - 2ac + cc + bb$; onde $cc = 2ac - bb$. Ciò posto, nel triangolo FMf si ha (750) $fM + MF (2a) : Ff (2a - 2c) :: fP - PF (2a - 2x) : fM - MF = 2a - 2x - 2c + \frac{2cx}{a}$. Dunque (232) $MF = a - a + x + c - \frac{cx}{a} = x + c - \frac{cx}{a}$. Or nel triangolo rettangolo PMF , si ha $PM^2 = FM^2 - PF^2$, o $yy = xx + 2cx + cc - \frac{2cxx}{a} - \frac{2cxc}{a} + \frac{ccxx}{aa} = xx + 2cx - cc$; e riducendo, $yy = 4cx - \frac{2cxx - 2cxc}{a} + \frac{ccxx}{aa}$; e mettendo $2ac - bb$ in luogo di cc , e poi riducendo, si ha $yy = \frac{2bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$.

Nell' Iperbole, facendo similmente (fig. 77) $Ss = 2a$, $Ll = 2b$, SF o $sf = c$, $SP = x$, e $PM = y$; si ha $Ps = 2a + x$, $PC = a + x$, $PF = x - c$, $Pf = x + 2a + c$, CF , o $Sl = a + c$ (800). E nel triangolo rettangolo SCI , si ha $Sl^2 = Cl^2 + SC^2$, o sia $aa + 2ac + cc = bb + aa$. Dunque $cc = bb - 2ac$. Indi avendo supposto una retta $M\phi = MF$, e tirata da M dall' altro lato dell' ordinata MP , ci da $P\phi = PF$: nel triangolo ϕMf , si ha $Mf - M\phi$, o $fM - FM (2a) : f\phi (2a + 2$

$+ 2x) :: Pf - P\phi (2a + 2c) : FM +$
 $fM = 2a + 2c + 2x + \frac{2cx}{a}$. Dunque $FM =$
 $c + x + \frac{cx}{a}$. Dunque essendo $PM^2 = FM^2$
 PF^2 , si ha sostituendo, e riducendo come so-
 pra, $yy = \frac{2bbx}{a} + \frac{bbxx}{aa}$ per l'equazione agli assi
 dell'Iperbole.

* OSSERVAZIONE. Queste due equazioni
 non possono ridursi alla parabola accagione
 dell'espressione, che vi entra de' due assi *.

811. II°. I calcoli dell'Ellissi, e dell'
 Iperbole si fanno tutti nella stessa maniera,
 e i loro risultati non differiscono ordinaria-
 mente, che ne' segni: e perciò quando noi
 faremo in appresso i calcoli, che saranno co-
 muni alle due sezioni, e che avranno sola-
 mente qualche termine preceduto da' segni $+$,
 o pure di $-$ ei bisognerà ricordarsi, che il segno
 superiore è sempre per l'ellissi, e l'inferiore
 per l'iperbole. Per esempio le due equa-
 zioni precedenti si riducono a questa $yy =$
 $\frac{2bbx}{a} \mp \frac{bbxx}{aa}$.

812. Nella parabola, ove $a = \infty$; l'e-
 spressione $yy = 4cx \mp \frac{2cx \mp 2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa}$, si
 riduce a $yy = 4cx$. Questa è dunque l'equa-
 zione alla Parabola.

813. COROLL. Perchè $cc = \pm 2ac \mp bb$,
 si ha $bb = 2ac \mp cc = c \times (\frac{2a}{Bb} \mp \frac{c}{SF})$

SF $\times$ Fs, ei ne segue, che la metà del secondo asse è mezza proporzionale fra le distanze d' un foco dai due vertici.

814. PROBLEMA III. Trovar l'espressione del parametro dell' asse principale d' una sezione conica.

SOLUZIONE. Se nell' equazione non ridotta $yy = 4cx \mp \frac{2cxx \mp 2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa}$, fare $x = c$, voi avrete $yy = 4cc \mp \frac{4c^3}{a} + \frac{c^4}{aa}$, estraendo le radici, $y = 2c \mp \frac{cc}{a}$, ch'è il valore dell' ordinata, che passa per lo foco F, il suo doppio è (801) il valore del parametro p : si ha dunque $p = 4c \mp \frac{2cc}{a}$.

815. COROL. I. Nella parabola poichè $a = \infty$, si ha $p = 4c$.

816. COROLL. II. Il parametro dell' asse principale d' una sezione conica è quadruplo della distanza del vertice dal foco nella parabola, più del quadruplo nell' Iperbole, meno del quadruplo nell' Ellissi.

817. COROLL. III. Se nell' equazione $p = 4c \mp \frac{2cc}{a}$ si sostituisce in luogo di cc il suo valore $\pm 2ac \mp bb$, s' avrà $p = \frac{2bb}{a}$, o pure $p = \frac{4bb}{2a}$, che ci dà questa proporzione $2a : 2b :: 2b : p$. Cioè a dire, il parametro dell'.

dell' asse principale è una terza proporzionale dopo questo, e' l' secondo asse.

818. PROBLEMA IV. Trovare un' equazione, che contenga il rapporto del parametro dell' asse principale alle funzioni delle ascisse e delle ordinate d' una sezione conica.

SOLUZIONE. Poichè $p = \frac{2bb}{a}$, dunque $\frac{p}{2} ap = bb$; dunque sostituendo nell' equazione generale $yy = \frac{2bbx}{a} \mp \frac{bbxx}{aa}$, s' avrà $yy = px \mp \frac{pxx}{2a}$.

819. COROLL. I. Nella parabola poichè $a = \infty$; si ha $yy = px$, ch' è l' equazione alla parabola, la stessa che la precedente (812).

820. COR. II. L' equazione generale $yy = px \mp \frac{pxx}{2a}$, o sia $2ayy = 2apx \mp pxx$, si riduce a questa proporzione $yy : 2ax \mp xx :: p : 2a$: Or $2ax \mp xx = (2a \mp x) \times x = sP \times PS$: Dunque in generale *I quadrati delle ordinate all' asse principale dell' ellissi, e delle iperboli, sono ai prodotti delle ascisse corrispondenti, come il parametro è all' asse principale.*

E perchè il rapporto del parametro al suo asse è costante in una stessa sezione conica, si può dire in generale, che *i quadrati delle ordinate sono fra loro come i prodotti delle loro ascisse.*

Mettendo similmente in proporzione l' equazione agli assi $yy = \frac{2bbx}{a} \mp \frac{bbxx}{aa}$, si ha $yy :$

2ax

$2ax \mp xx :: bb : aa$, cioè a dire nell'ellissi, e nell'iperbole i quadrati delle ordinate all'asse principale, sono ai prodotti delle loro ascisse, come il quadrato del secondo semiasse, è al quadrato del semiasse principale.

821. COROLL. III. Nella parabola, poichè il paramento p è costante, il rapporto di yy a x è costante. Dunque nella parabola i quadrati delle ordinate sono tra loro, come le ascisse.

822. PROBLEMA V. Trovar l'espressione della superpendicolare, o sunnormale PN (fig. 76. 77.).

SOLUZIONE. Fm essendo (808) perpendicolare a MT, è parallela alla normale MN, e i triangoli fMN, fmF sono simili. Dunque $fm (2a) : fF (2a \mp 2c) :: Mm$, o $FM (x + c \mp \frac{cx}{a}) : FN = x + c \mp \frac{cx}{a} \mp \frac{2cx}{a} + \frac{ccx}{aa}$. Ma $PN = FN - FP$, e $FP = x - c$; dunque $PN = 2c \mp \frac{cx}{a} \mp \frac{2cx}{a} + \frac{ccx}{aa}$. Sostituendo $\pm 2ac \mp \frac{p}{2}$ ap in luogo di cc (814) * s' avrà $PN = 2c \mp \frac{2cx}{a} - 2c + \frac{p}{2} \pm \frac{2cx}{a} \mp \frac{px}{2a}$ * : e riducendo, $PN = \frac{p}{2} \mp \frac{px}{2a}$. E se si pone $\frac{2bb}{a}$ in luogo di p (817), si avrà $PN = * \frac{2b^3}{2a} \mp \frac{2bx^2}{2a^2} * = \frac{bb}{a} \mp \frac{bbx}{aa}$.

823. COROLL. I. Nella parabola la *funnormale* è la metà del Parametro, e per conseguenza sempre costante poichè $a = \infty$, che ci dà $PN = \frac{1}{2} p = FA$ (fig. 78).

824. COROLL. II. In una sezione conica la *funnormale* è per rapporto al semiparametro dell'asse principale, uguale nella Parabola, più piccolo nell'Ellissi, più grande nell'Iperbole.

825. PROBLEMA VI. Trovar l'espressione della *sottangente* PT.

SOLUZIONE. Nel triangolo rettangolo NMT sia ha (561) $\div PN, PM, PT$. Dunque PT

$$= \frac{PM^2}{PN} = \frac{px + \frac{px^2}{2a}}{\frac{p}{2} + \frac{px}{2a}} = \frac{8a^2 px + 4apx^2}{4a^2 p + 4apx} = \frac{2ax + x^2}{a + x} \quad *.$$

Dividendo dunque $px + \frac{px^2}{2a}$ per $\frac{p}{2} + \frac{px}{2a}$, e riducendo si ha $PT = \frac{2ax + xx}{a + x}$.

826. COROLL. I. Nella Parabola, $PT = 2x$, imperocchè, essendo $a = \infty$, si ha $PT = \frac{2\infty x + xx}{\infty + x} = \frac{2\infty x}{\infty} = 2x$.

827. COROLL. II. In una sezione conica la *sottangente* è riguardo al doppio dell'ascissa, uguale nella parabola, più grande nell'Ellissi, più piccola nell'Iperbole. Imperocchè mettendo la formola in proporzione, si ha per l'Ellissi $PT: 2a - x :: x: a - x$, e moltiplicando la se-

con-

conda ragione per 2, $PT : 2a - x :: 2x : 2a - 2x$: or $2a - x$ è maggiore di $2a - 2x$: dunque (306) PT è maggiore di $2x$. E nell' Iperbole $PT : 2a + x :: 2x : 2a + 2x$; Ma $2a + x$ è minore di $2a + 2x$, dunque PT è minore di $2x$.

$$828. \text{ COROLLARIO III. } PT - SP = ST, \\ * \frac{2ax \mp x^2}{a \mp x} - x = \frac{2ax \mp x^2 - ax \pm x^2}{a \mp x};$$

dunque $ST = \frac{ax}{a \mp x}$, e nella Parabola $ST = x$. Si vede dunque, che ST è riguardo all' *Ascissa*, uguale nella parabola, minore nell' *Ellissi*, maggiore nell' *Iperbole*.

829. OSSERVAZIONE. La Parabola, e l' Iperbole avendo i rami infiniti, x può divenire $= \infty$: Ma nella Parabola poichè $ST = x$, ST diverrebbe anche infinita; ma nell' Iperbole facendo $x = \infty$ nell' equazione $ST =$

$\frac{ax}{a \mp x}$ ella si riduce ad $ST = a$; cio, chè fa vedere 1°. che il punto d' incontro T di tutte le tangenti possibili dell' Iperbole col suo asse principale, è sempre compreso fra 'l vertice, e 'l centro. 2°. Che per lo centro dell' Iperbole si può tirare da ciascun lato dell' asse una retta, che vada a toccare ciascun ramo alla sua estremità infinita. Si chiamano queste due tangenti, gli *Asintoti* dell' Iperbole.

$$830. \text{ COROLL. IV. } CP \pm PT = CT$$

$$= \frac{a^2 \mp 2ax + x^2 \pm 2ax - x^2}{a \mp x} \text{ . Dunque CT}$$

$= \frac{aa}{a \mp x}$, ch' essendo posto in proporzione ,
da $a \mp x : a :: a : CT$. Dunque CP , CS ,
CT sono in proporzione continua ; e per que-
sta proporzione si trova facilmente il punto T
sopra l' asse principale , per dove dè passare una
tangente , che si propone tirare da un punto
dato M .

831. PROBLEMA VII. *Trovar l' espressione*
(fig. 76 , 77) *della perpendicolare SB , all' asse*
principale della sezione conica , elevata dal vertice
S fino alla tangente TM .

SOLUZIONE. I triangoli TPM , TSB essen-
do simili , si ha TP $\left(\frac{2ax \mp xx}{a \mp x} \right) : TS \left(\frac{ax}{a \mp x} \right)$
:: PM : SB , o accagione dello stesso deno-
minatore $a \mp x$, si ha $2ax \mp xx : ax :: PM :$
SB : o infine (296) $2a \mp x : a :: PM :$
SB . Elevando a quadrato , e mettendo per
PM² il suo valore (812) , si ha $4aa \mp 4ax$
 $+ xx : aa :: \frac{2abbx \mp bbxx}{aa} : SB^2$. Dunque

$$SB^2 = \frac{2abbx \mp bbxx}{4aa \mp 4ax + xx} , \text{ o pure mettendo } \frac{1}{2} ap$$

in luogo di bb (820) s' avrà $SB^2 =$
 $\frac{aapx \mp \frac{1}{2} apxx}{4aa \mp 4ax + xx} .$

832. COR. I. Nella parabola , $SB = \frac{1}{2} PM$

$PM = \frac{1}{2} y$; imperocchè $a = \infty$, dunque $SB^2 = \frac{\infty^2 px}{4\infty^2} = \frac{1}{4} px = \frac{1}{4} yy$: dunque $SB = \frac{1}{2} y$

833. COR. II. Nell' Iperbole facendo $x = \infty$, la prima formola di SB^2 si riduce a $SB^2 = \frac{bb\infty^2}{\infty^2} = bb$. Dunque $SB = b$.

Dunque facendo (fig. 74) $SB = S\beta$ uguali alla metà del secondo asse, e facendo passare per lo centro C le rette $\infty\beta$, bB elleno faranno gli asintoti delle iperboli MSm , OSo .

834. PROBLEMA VIII. Trovar l'espressione della normale NM.

SOLUZIONE. Nel triangolo rettangolo NPM si ha $NM^2 = PM^2 + PN^2$. Dunque $NM^2 = 2a^3 bbx + aabbxx + aab^4 + 2ab^4 x + b^4 xx$

a^4 .

e facendovi entrare il Parametro, $NM^2 = 4aapx + 2apxx + aapp + 2appx + ppxx$

$4aa$.

835. COR. I. Nella parabola, ove $a = \infty$, si ha $NM^2 = px + \frac{1}{4} pp$.

836. COR. II. Se si fa $x = 0$ nella seconda formola, ella si riduce a $NM^2 = \frac{1}{4} pp$: dunque $NM = \frac{1}{2} p$. E se si fa $x = a$ nella prima, si avrà per l'Ellissi $NM = b$. Ond' è chiaro 1°. Che in ogni sezione conica la normale è almeno uguale alla metà del parametro, o all'ordinata, che passa per lo foco. Poichè, se si prende il punto M così dappresso al vertice S, che l'ascissa corrispondente all'ordi-

ordinata MP sia infinitamente piccola, o nulla, la normale $= \frac{1}{2} p$. 2°. Che nell'Ellissi la normale non può eccedere la metà dell'asse minore.

837. PROBLEMA IX. Trovar l'espressione di, SN, cioè a dire della distanza dal vertice S all'incontro della normale MN.

$$\text{SOLUZIO. } SN = SP + PN = \frac{abb \mp bbx + aax}{aa}$$

$$= \frac{ap \mp px + 2ax}{2a}, \text{ e nella Parabola } SN = \frac{p}{2}$$

$p + x$.

838. COROLL. Se si fa $x = 0$, si ha $SN = \frac{1}{2} p$; e perchè le quantità a , e p sono costanti, e additive nelle formole della parabola, e dell'Iperbole; egli è chiaro, che quanto più x è grande, tanto più è grande SN in queste due sezioni. Onde si vede, che la normale cade sempre al di là del foco per rapporto al vertice, e non mai fra il vertice, e 'l foco il più prossimo.

839. PROBLEMA X. Trovar l'espressione della tangente TM.

$$\text{SOLUZ. } PM^2 + PT^2 = TM^2; \text{ dunque } TM^2 =$$

$$\frac{2abbx \mp bbxx}{aa} + \frac{4aaxx \mp 4ax^3 + x^4}{aa \mp 2ax + xx} . \text{ Ovvero}$$

$$TM^2 = px \mp \frac{p^2x}{2a} + \frac{4aaxx \mp 4ax^3 + x^4}{aa \mp 2ax - xx} . \text{ E}$$

nella parabola, $TM^2 = px \times 4xx = 4AS \times SP + 4SP^2$.

840. PROBLEMA XI. Trovare un'equazione

ne

ne agli assi dell' Ellissi, e dell' Iperbole contando le ascisse dal centro (fig. 76. 77.).

SOLUZIONE. Avendo ritenute tutte le stesse denominazioni de' Problemi precedenti, eccetto che $CP = x$, che fa l' ascissa $SP = \pm a \mp x$, e $sP = a + x$, si ha (820) $yy : \pm aa \mp xx :: bb : aa :: p : 2a$. Dunque l' equazione agli assi è $yy = \pm bb \mp \frac{bbxx}{aa}$. E l' equazione al parametro è $yy = \pm \frac{1}{2} ap \mp \frac{pxx}{2a}$.

841. COR. I. Per l' Ellissi. L' ordinata MH all' asse minore dell' Ellissi (fig. 76) essendo $= CP = x$, e $CH = PM = y$, si anno le ascisse $LH = b - y$, e $Hl = b + y$: dunque $LH \times Hl = bb - yy$. Or l' equazione $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$ si riduce a questa proporzione $xx : bb - yy :: aa : bb$. Dunque i quadrati delle ordinate all' asse minore d' un' ellissi, sono ai prodotti delle loro ascisse, come il quadrato dell' asse maggiore è al quadrato del minore. E per conseguenza, se si fa $\div 2b : 2a : q$, o se si fa $q = \frac{2aa}{b}$, (q è il parametro dell' asse minore), sostituendo nella proporzione, s' avrà $xx : bb - yy :: q : 2b$, cioè, i quadrati delle ordinate all' asse minore, sono ai prodotti delle loro ascisse, come il parametro dell' asse minore, è all' asse minore. E in generale, I quadrati delle ordinate all' asse minore sono fra loro, come i prodotti delle loro ascisse. 842.

842. COR. II. *Le ordinate all' asse minore dell' Ellissi , anno precisamente le stesse proprietà , che quelle dell' asse maggiore .*

843. COR. III. Se si descrive un cerchio SNQ (fig. 81), il cui diametro Ss sia l'asse maggiore , o il minore d'un ellissi , e se si tirino NP , np ordinate a questo diametro , i loro quadrati sono tra loro (768), come i prodotti delle loro ascisse $sP \times PS$, $sp \times pS$. Or i quadrati di MP , mp sono nella stessa ragione ; dunque i quadrati delle ordinate al cerchio , sono come i quadrati delle ordinate corrispondenti all' Ellissi , e per conseguenza le ordinate al cerchio sono tra loro come le ordinate all' Ellissi , o sia elleno sono tra loro come OC , ovvero CS ad LC , cioè a dire come l' asse , *sen't* quale il cerchio è stato descritto , è all' altro asse .

844. OSSERV. I. Il rapporto delle ordinate al secondo asse dell' iperbole non può essere ridotto alla stessa proporzione ; imperocchè , se si mette in proporzione l' equazione

all' Iperbole $yy = -bb + \frac{bbxx}{aa}$, si ha $xx :$

$yy + bb :: aa : bb$, della quale il secondo termine $yy + bb$ esprime la somma de' quadrati di CH , e di CL (fig. 77) , e non già il prodotto delle ascisse HL , Hl , il quale , perchè $HL = y - b$, e $Hl = y + b$, sarà $yy - bb$. Ma indipendentemente da questa proporzione , si ha la formola generale $xx =$

$aa - \frac{aayy}{bb}$ per l' equazione al secondo asse

Tomo II.

Cc

dell'

dell' Ellissi , e dell' Iperbole , contando le ascisse dal centro , e chiamando l' ordinata x , e l' ascissa y .

845. II. Si possono , ad imitazione di questa soluzione , trovar l' equazioni contando le ascisse dal foco , o anche da un punto qualunque preso nell' asse ,

846. COR. IV. Calcolando sull' equazioni di questo problema gl' istessi triangoli , che ne' Problemi V , VI , VII , VIII , IX , e X , si trovano le formole seguenti . $PN = \frac{bbx}{aa} = \frac{px}{2a}$;

$$PT = \frac{\pm aa \mp xx}{x}, CT = \frac{aa}{x}, ST = \frac{\pm aa \mp ax}{x},$$

$$SB^2 = \frac{\pm a^4 bb \mp 2a^3 bbx + 2abbx^2 \mp bbx^3}{a^4 - 2aaxx + x^2},$$

$$\text{ovvero } \frac{\pm a^5 p \mp 2a^4 px \pm 2aapx^2 \mp apx^3}{2a^4 - 4aaxx + 2x^2},$$

$$NM^2 = \frac{\pm a^4 bb \mp aabbxx + b^4 xx}{a^4} =$$

$$\frac{\pm 2a^3 p \mp 2apxx + ppxx}{4aa},$$

$$SN = \frac{\pm a^3 \mp aax + bbx}{aa} = \frac{\pm 2aa \mp 2ax + px}{2a}$$

$$MT^2 = \frac{a^6 - 2a^4 xx + aax^2 \pm aabbxx \mp bbx^2}{aaxx} \text{ ov.}$$

$$MT^2 = \frac{2a^5 - 4a^3 xx + 2ax^2 \pm aapxx \mp px^2}{2aaxx}.$$

847. COROLL. V. Poichè e non entra in alcuna delle formole de' problemi precedenti, e' segue, che queste formole convengono anche al second' asse dell' Ellissi, e dell' Iperbole, e ch' esse n' esprimono le proprietà, facendo i cangiamenti necessarj nelle lettere.

848. COROLL. VI. Poichè il secondo asse Ll delle Iperboli opposte MSm , Oso (fig. 74) è stato determinato, tirando CF , o Cf da S in L , e in l ; e gli asintoti (833) facendo SB , Sb uguali a CL , o Cl ; segue, che se si prende $C\Phi$, $C\phi$ uguali ad LS , o ls , e se si tirino $b\beta$ $B\beta$, elleno passeranno pei punti L , l , e si avrà Lb , $L\beta$; lB , $l\beta$ uguali a Cs , o CS : onde si vede, che co' punti Φ , ϕ come fochi, e Ll come asse principale si possono descrivere due Iperboli opposte dLD , Nln , delle quali Ss sarà l'asse secondo, e Bb , $\beta\beta$ saranno anche gli asintoti. Queste due iperboli si chiamano *conjugate* alle due MSm , Oso : e reciprocamente queste si chiamano *conjugate* a quelle.

849. Egli è chiaro, che tutte l'equazioni, formole, proprietà, che convengono alle Iperboli MSm , Oso , convengono anche alle loro *conjugate*, facendov' i cangiamenti necessarj; per esempio chiamando Ll l'asse principale, e Ss il secondo asse, &c.

850. Egli è chiaro ancora, che gli otto rami delle quattro iperboli *conjugate* devono congiungersi senza tagliarsi ai punti, ove gli asintoti toccano le loro estremità, e che di questa maniera elleno formano una figura chiusa da quattro punti di

riunione infinitamente lontani dal centro . Questa figura è un Poligono simmetrico , composto d'una infinità d'angoli concavi infinitamente ottusi , e di quattro angoli convessi infinitamente acuti , di maniera che si può considerare questo spazio chiuso da queste quattro iperboli , come si considera quello , ch'è chiuso da un' ellissi .

E però in appresso noi parleremo di questo spazio , come s' e' fosse chiuso da una sola curva .

*Proprietà delle sezioni Coniche per rapporto
a' loro diametri .*

851. **S**I chiama *diametro* d' una sezione conica , ogni retta , che passa per lo suo centro ; imperocchè si farà vedere , che la loro proprietà è di dividere in due ugualmente le rette , che divengono loro doppie ordinate .

852. Un diametro è determinato di grandezza da' due punti , ov' egli incontra la sezione da una parte , e dall' altra , e questi punti si chiamano l' origine di questo diametro . Così OM , ND (fig. 74. 75.) sono diametri determinati ; le origini de' quali sono a' punti O , M , e N , D .

853. Segue da ciò , che *il diametro d' una parabola è una retta indefinita tirata da un punto del-*

della parabola, il qual' è la sua origine, parallelamente all' asse; poichè il centro della parabola è infinitamente lontano dal suo vertice, tal' è Mf (fig. 78).

854. Si chiama *diametro conjugato a un' altro diametro*, quello, ch' è parallelo alle ordinate di questo, o alla tangente, che passa per la sua origine. Così ND (fig. 74, 75) è un diametro conjugato al diametro MO , perchè ND è parallela alla tangente, che passa per lo punto M . Reciprocamente MO si chiama diametro conjugato al diametro ND .

855. Onde si vede, che la parabola non ha diametri conjugati.

856. TEOR. I. Un diametro qualunque ND (fig. 74. 75.) è diviso in due ugualmente al centro C .

DIM. Per N tirate NQ ordinata a uno degli assi, e avendo preso $CE = CQ$, innalzate allo stesso asse la perpendicolare ED , io dico, ch' ella incontrerà il diametro ND , in un punto D , che sarà nella sezione. Imperocchè per costruzione i triangoli CQN , CED sono uguali; dunque $CD = CN$, e $DE = NQ$. Or (793.) le ordinate ugualmente lontane dal centro sono uguali; dunque NQ essendo un' ordinata, la sua uguale DE anche n' è una; dunque la sua estremità D è nella sezione.

857. TEOR. II. Se dall' estremità M , N di due diametri conjugati si tirino MP , NQ ordinate all' asse principale Ss , il quadrato CQ dell'

dell'ascissa compreso fra'l centro C , e una delle ordinate, è uguale al prodotto $SP \times PS$ delle ascisse dell'altra ordinata.

DIM. Fatte tutte le stesse denominazioni, che nel Problema XI, facendo di più $CQ = u$, si ha (fig. 75) $SQ = a - u$, e $sQ = a + u$. Nell'Ellissi si ha (820) $SP \times PS (aa - xx) : SQ \times QS (aa - uu) :: PM^2 : NQ^2$. E nell'Iperbole (844) $SP \times PS (aa + xx) : CS^2 + CQ^2 (aa + uu) :: PM^2 : NQ^2$. Dunque $\pm aa \mp xx : aa \mp uu :: PM^2 : NQ^2$. Ma per ragione de' triangoli simili TPM , CNQ si ha $PM^2 : NQ^2 :: TP^2 (\frac{(\pm aa \mp xx)^2}{xx}) : CQ^2 (uu)$: donde si ricava facilmente $uu = \pm aa \mp xx$, ovvero $CQ^2 = SP \times PS$.

858. COR. I. Nell'Ellissi niuna delle ascisse può essere al di là del vertice per rapporto al centro; così si ha sempre CE^2 , o $CQ^2 = SP \times PS$, e $CP^2 = sQ \times QS$. Quest'ultima uguaglianza non si trova nell'Iperbole, ove $CP^2 = CS^2 + CQ^2$, poichè $xx = aa + uu$.

859. COR. II. Per l'Ellissi $aa : bb :: sQ \times QS$, o $CP^2 (xx) : NQ^2 = \frac{bbxx}{aa}$. Ma ne' triangoli rettangoli CPM , CNQ , si ha $CM^2 = CP^2 + PM^2$: dunque $CM^2 = xx + bb - \frac{bbxx}{aa}$, e $CN^2 = CQ^2 + NQ^2$, dunque

que $CN^2 = aa - xx + \frac{bbxx}{aa}$. Dunque $CM^2 + CN^2 = bb + aa$. Dunque la somma de' quadrati di due diametri conjugati qualunque d' un ellissi, è uguale alla somma de' quadrati de' due assi, e per conseguenza alla somma de' quadrati di due altri diametri conjugati. O, ciocch'è lo stesso nell' ellissi la somma de' quadrati di due diametri conjugati qualunque è costante.

860. COR. III. Per l' Iperbole $aa : bb :: CS^2 + CQ^2$, o $CP^2 (\frac{1}{2}x) : NQ^2 = \frac{bbxx}{aa}$. Ma $CM^2 = CP^2 + PM^2$; dunque $CM^2 = xx - bb + \frac{bbxx}{aa}$, e $CN^2 = CQ^2 + NQ^2$.

Dunque $CN^2 = xx - aa + \frac{bbxx}{aa}$. Dunque $CN^2 - CM^2 = bb - aa$. Dunque la differenza de' quadrati di due diametri conjugati qualunque d' un iperbole è costante.

861. TEOR. III. Il quadrato d' una retta IH tirata al di dentro d' una sezione conica, e ordinata a un diametro qualunque MO, è al prodotto MH $\times$ HO delle sue ascisse, come CN^2 , il quadrato del semidiametro conjugato, è al quadrato CM^2 del semidiametro, al quale IH è ordinata. O sia $IH^2 : MH \times HO :: CN^2 : CM^2$.

DIM. Avendo tirata IG ordinata all' asse Ss, e per H le perpendicolari HR, HK; facendo GK , o $HR = r$, $CK = t$, $CM = d$, si ha $SG = r \pm a \mp t$, e $SG = a \mp r + t$. Per ragion de' triangoli simili CPM, CHK,

Cc 4

si ha

fi ha prima $CP (x) : CM (d) :: CK (t) :$

$CH = \frac{dt}{x}$, dunque $MH = \pm d \mp \frac{dt}{x}$, e

$HO = d + \frac{dt}{x}$, così $MH \times HO = \pm dd \mp$

$\frac{ddt}{xx}$. Si ha anche $CP (x) : PM (y) :: CK$

$(t) : KH$, o $RG = \frac{ty}{x}$, e per cagione de'

triangoli simili TPM, IHR , fi ha $TP \frac{(\pm aa \mp xx)}{x}$:

$PM (y) :: HR (r) : RI = \frac{rxy}{\pm aa \mp xx}$.

Dunque $IG^2 = (IR + RG)^2 = \frac{rrxxyy}{(\pm aa \mp xx)^2}$

$+ \frac{2rtyy}{\pm aa \mp xx} + \frac{ttyy}{xx}$. Or (840) $SP \times PS$

$(\pm aa \mp xx) : SG \times GS (2rt \pm aa \mp rr \mp tt) ::$

$PM^2 (yy) : IG^2$. Prendendo questo valore

di IG^2 , e uguagliandolo a quello, che si è trovato,

fi ha l'equazione $\frac{2rtyy \pm ayy \mp rvy \mp tyy}{\pm aa \mp xx} =$

$\frac{rrxxyy}{(\pm aa \mp xx)^2} + \frac{2rtyy}{\pm aa \mp xx} + \frac{ttyy}{xx}$. Dalla

quale si tirerà il valore di HR^2 , o $rr = aa -$

$xx + tt - \frac{aats}{xx}$.

Ciò posto, io dico, che $MH \times HO (\pm$

$dd \mp \frac{ddt}{xx}) : CM^2 (dd) :: HR^2 (aa -$

$xx + zz - \frac{aatt}{xx}) : CQ^2 (\pm aa \mp xx)$,
poichè il prodotto degli estremi è uguale al pro-
dotto de' mezzi .

Infine ne' triangoli simili HIR , CQN , si
ha $HR^2 : CQ^2 :: IH^2 : CN^2$. Dunque MH
 $\times HO : CM^2 :: IH^2 : CN^2$, o sia $IH^2 : MH$
 $\times HO :: CN^2 : CM^2$.

862. COROLL. Le ordinate a un diame-
tro qualunque dell' Ellissi non potendo cadere
al di fuori della sezione , questo Teorema è
vero riguardo a un diametro qualunque dell'
Ellissi ; e si vede facilmente , che in tutte le se-
zioni coniche le proprietà degli assi , che non di-
pendono necessariamente da quelle de' fochi , conven-
gono anche a' diametri conjugati .

E non v' ha differenza , se non in quanto ,
che le ordinate gli assi gli sono perpendicola-
ri , quandocchè le ordinate ai diametri gli
sono oblique . Così se dal punto I si tiri la
ordinata al diametro DN , si farà vedere come
sopra (841) che nell' Ellissi $Ib^2 : Db \times bN$
 $:: CM^2 : CD^2$, e nell' Iperbole (844) che
 $Ib^2 : Cb^2 + CD^2 :: CM^2 : CD^2$; di maniera
che ci possiamo servire delle stesse equazioni
pei diametri , che per gli assi conjugati , i pa-
rametri delle quali faranno terze proporzionali ,
come al numero 817 . Ma riguardo a quel-
lo d' un diametro Mf (fig. 78) d' una para-
bola , sarà sempre il quadruplo della distanza
Mm dalla sua origine M alla direttrice Am ,
o al foco dell' Asse . Imperocchè (839) MT^2

$= 4S \times SP + 4SP^2$: Ma se per lo vertice S , si tiri SO ordinata al diametro Mf , si ha $SO = MT$, e la sua ascissa $MO = ST = SP$ (828).

Ma perchè le ordinate ai diametri anno le stesse proprietà, che quelle dell'asse, $SO^2 = MO \times p$ (819), o $4AS \times SP + 4SP^2 = SP^2 \times p$; e dividendo per SP , $4AS + 4SP = p$. Ma $4AS + 4SP = 4AP = 4Mm = 4MF$. Dunque $p = 4Mm = 4MF$.

863. TEOR. IV. *Se dall'estremità M d'un diametro qualunque CM (fig. 79. 80.) s'abbassa sopra la sua conjugata la perpendicolare MR , si ha questa proporzione $MR:CL::CS:CD$.*

DIM. Si ha (859, e 860) $CD^2 \pm CM^2 = bb \pm aa$. Ma $CM^2 = xx \pm bb \mp \frac{bbxx}{aa}$;

dunque $CD^2 = \frac{bbxx \mp aaxx \pm a^4}{aa}$. Dal cen-

tro C avendo abbassata sopra la tangente la perpendicolare CI , e continuata CL fino a che con ella s'incontri in X , i triangoli simili CIX , MNP danno CI , o $MR: CX:: MP$, o $CU: NM$. Dunque $MR \times NM = CX \times CU$. Ma (830, e 847) $CX \times CU = CL^2$: Dunque $MR \times NM = CL^2$. Dun-

que $NM^2 \left(\frac{b^4 xx \pm a^4 bb \mp aabbxx}{a^4} \right): CL^2 (bb)$

$:: CL^2 (bb): MR^2 = \frac{a^4 bb}{bbxx \pm a^4 \mp aaxx}$.

Dunque $MR^2 \times CD^2 = aabb = CS^2 \times CL^2$.
Dun-

Dunque $MR^2 : CL^2 :: CS^2 : CD^2$. Ovvero $MR : CL :: CS : CD$.

864. COROLL. La superficie d'un parallelogrammo formato sopra i diametri conjugati CM, CD sarà uguale a quella d'un rettangolo formato sopra i semiaffi CS, CL; imperocchè l'uno sarà misurato da $CD \times MR$, e l'altro da $CS \times CL$. Egli è l'istesso de' diametri interi, e degli affi interi. Dunque la superficie d'un parallelogrammo formato intorno a due diametri conjugati qualunque, è uguale a quella del rettangolo formato intorno agli affi, e per conseguenza uguale anche a quella d'un altro parallelogrammo formato intorno a due altri diametri conjugati qualunque.

Proprietà dell' Iperbole per rapporto a' suoi Asintoti.

865. POichè per tirare gli asintoti $C\beta$, bB (fig. 74) si sono fatte SB, $S\beta$ uguali a CL (833), ei segue, che l'angolo degli asintoti βCB dè essere acuto, retto, o ottuso, secondo che il primo semiasse CS è più grande, uguale, o più piccolo del suo conjugato CL. Imperocchè l'angolo SCB, che n'è la metà è più piccolo, uguale, o più grande di 45° , secondo che SB è più piccolo, uguale, o più grande di CS.

866. Le diagonali SL, $C\beta$ del rettangolo $CL\beta S$, formato sopra i semiaffi, essendo u-

gua-

guali, e dividendosi in due ugualmente in Y, si ha $SY = CY$, e CY^2 , o $SY^2 = \frac{1}{4} CS^2 + \frac{1}{4} CL^2 = \frac{1}{4} aa + \frac{1}{4} bb$.

867. Quando l'angolo degli asintoti è retto; l'iperbole si chiama *equilatera*, onde si vede 1°. Che il parametro d'un iperbole equilatera, è uguale a ciascuno degli assi, che sono allora uguali. 2°. che contando le ascisse dal vertice, l'equazione all'asse principale d'un iperbole equilatera è $yy = 2ax + xx$; e contando le ascisse dal centro $yy = -aa + xx$, poichè $a = b$, e $p = 2a = 2b$, quali bisogna sostituire nell'equazioni agli assi dell'iperbole. 3°. Che l'equazioni al cerchio essendo $yy = 2ax - xx$, e $yy = aa - xx$, secondo che le ascisse sono contate dal vertice, o dal centro, il cerchio è all'iperbole equilatera, cioè *cb'* è l'ellissi all'iperbole ordinaria.

868. TEOR. V. Avendo prolungata dall'una e l'altra parte un ordinata qualunque PM dall'asse principale sino agli asintoti in A, a; si ha $AM \times Ma = CL^2$, o $AM : CL :: CL : Ma$.

DIM. Dall'equazione $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$ (840)

si cava bb , o $CL^2 = \frac{bbxx}{aa} - yy = \left(\frac{bx}{a} - y \right)$

$\times \left(\frac{bx}{a} + y \right)$. Ma per li triangoli simili CSL, CAP, si ha $CS : CL :: CP : PA = \frac{bx}{a}$: dunque $AM = \frac{bx}{a} - y$, e $Ma = \frac{bx}{a} + y$, dunque $AM \times Ma = CL^2$.

869. COROLL. Si ha dunque ancora IU
IU

$$\times Iu = CL^2 = AM \times Ma = am \times mA =$$

$$iu \times iU.$$

870. TEOR. VI. Se per un punto M d' un Iperbole si tiri all' asintoto vicino CA una retta MR parallela all' altro asintoto CB, si ha $MR \times RC = CY^2 = SY^2$, o $MR : SY = SY : RC$.

DIM. Tirate MX parallela ad AC, per avere $MX = RC$. Per cagion de' triangoli simili MAR, SBY, si ha $MR : SY = MA : S\beta$, o CL. Ma (868) $MA : CL :: CL : Ma$. E per cagion de' triangoli simili SBY, MaX, si ha $S\beta$, o CL : Ma :: βY , o SY : MX, o RC : Dunque $MR : SY :: SY : RC$.

871. COR. I. Ogni retta, come MR tirata da uno de' punti dell' Iperbole all' asintoto CA, e parallela all' altra asintoto CB, può essere riguardata come un' ordinata, il cui asintoto CA è la linea delle ascisse. Imperocchè l' asintoto CB essendo una tangente all' Iperbole la sua posizione determina quelle delle ordinate (772); l' origine delle ascisse è in C: così CR è l' ascissa di questa ordinata MR: Se dunque si fa $CR = x$, $MR = y$, CY , o $SY = d$, s' avrà $xy = dd$, o $xy = \frac{1}{4} aa + \frac{1}{4} bb$ per l' equazione dell' Iperbole per rapporto ai suoi asintoti.

872. COR. II. Se si prolunga MR fino all' Iperbole conjugata dLD, s' avrà $DR = RM$. Perchè $DR \times CR = CY^2 = MR \times CR$.

873. TEOR. VII. Le due parti EG, FI (fig. 85) d' una retta qualunque FE tirata a

traverso d' un iperbole , e comprese tra la curva , e gli asintoti son uguali fra loro .

DIM. Pei punti G , I fatte passare DT , BQ perpendicolari all' asse ; si ha (869) $DR \times RT$, o $GT \times GD = BI \times IQ$: Dunque $IQ : GT :: GD : BI$. Ma per ragione delle parallele DT , BQ , i triangoli GTE , EIQ sono simili , come anche FBI , FGD ; dunque $GD : BI :: GF : IF$. E $IQ : TG :: IE : GE$. Dunque $GF : IF = IE : GE$. E $GF - IF : IF :: IE - EG : EG$. Dunque $IG : IF :: IG : GE$. Dunque $IF = GE$.

874. COR. I. Indi si cava una maniera di descrivere un' iperbole fra due asintoti dati, e che passa per un punto I dato ; Imperocchè se per questo punto I si fa passare una delle rette AP , BQ , FE , &c. , prendendo $PH = AI$, $QK = BI$, $GE = FI$, &c. , s' avranno i punti H , K , G &c. , per dove l' Iperbole dè passare : indi uno de' punti trovati può servire , come il punto dato I per determinare gli altri .

875. COR. II. Se si prenda anche un punto diverso dal punto I , dentro , o fuori dell' Iperbole RSH di già descritta , se ne potrà descrivere un' altra , che abbia gli stessi asintoti , e che non incontrerà l' Iperbole RSH che all' estremità dei suoi rami infiniti .

876. COR. III. Una tangente se terminata agli asintoti è divisa in due ugualmente per lo punto del contatto . Imperocchè se la retta FE tirata ad arbitrio non entrasse , che infinitamen-

mente poco nell' Iperbole, i punti G, e I si confonderebbono co' l punto del contatto, e non si avrebbe $FI = GE$.

877. COR. IV. Una tangente eg terminata agli asintoti (fig. 74), è uguale al diametro DN conjugato al diametro MO, che passa per lo punto M del contatto. Poicchè se per M si tiri MD parallela all' asintoto CB, si ha (872) $MR = RD$; e per cagione de' triangoli simili eMR, eCg, si ha eR = RC. Dunque i triangoli eRM, DRC sono uguali (508). Dunque DC è parallela, e uguale ad eM; dunque il punto D della retta MD cade sopra l' iperbole DL nel punto, per dove passa il diametro conjugato al diametro MO.

878. TEOR. VIII. Se da due punti qualunque I, R (fig. 85) presi sopra un' iperbole si tirin ad arbitrio due parallele IA, RX terminate all' asintoto vicino, e due altre parallele IE, RY terminate all' altro asintoto, si ha $IA \times IE = RX \times RY$.

DIM. Le perpendicolari all' asse BQ, DT terminate agli asintoti, e tirate pei punti I, R, formano i triangoli simili BIA, DRX, e IQE, TRY. Dunque $IB : IA :: DR : RX$. E $IQ : IE :: RT : RY$. Dunque $IB \times IQ : IA \times IE :: DR \times RT : RX \times RY$. Ma $BI \times IQ = DR \times RT$ (869), dunque $IA \times IE = RX \times RY$.

879. COR. I. Se si tirino a traverso d' un iperbole due rette ad arbitrio FE, ZY parallele fra loro, e terminate agli asintoti, s' avrà sempre $FI \times IE = ZR \times RY$. 880.

880. COR. II. Se una di queste parallele è tangente in t , s'avrà $ft^2 = FI \times IE$, &c. .

Differenti Problemi sopra le Sezioni Coniche.

881. **P**ROBLEMA I. *Una porzione di sezione conica essendo data, determinarne la specie, e la posizione degli assi.*

SOLUZIONE. Tirate due parallele qualunque terminate all'una, e l'altra parte della sezione; fate passare una retta pei punti delle loro metà; ella sarà un diametro della sezione. Tirate anche due altre parallele, ma che sianno oblique alle due precedenti, e tirate per la loro metà un altro diametro. Se questi due diametri sono paralleli, la sezione è una parabola; se si dividono al di dentro della sezione, ella è un ellissi; se si segano al di fuori, è un'iperbole. Il punto d'intersezione n'è il centro. E però se con questo centro si descrive un arco di cerchio, che divida la sezione data in due punti, la retta, che passerà per questo centro, e per lo mezzo fra due punti, sarà l'asse: Se la sezione è una parabola, si tirerà una retta qualunque perpendicolare ai diametri trovati, e terminata dall'una, e l'altra parte alla sezione, e si taglierà in due ugualmente, e perpendicolarmente da una retta, che sarà l'asse.

882. PROBLEMA II. *Essendo dati di posizione tre punti M, m, μ , non in linea retta, e'l foco F (fig. 73), farvi passare una sezione conica, e determinarne la specie, e gli assi.*

SOLUZIONE. Avendo tirata Mm, $m\mu$, fate $FM : Fm :: ME : mE$, ed $Fm : F\mu :: mH : \mu H$. O, ciocch'è lo stesso, prendete $mE = \frac{Fm \times Mm}{Fm - FM}$, ed $mH = \frac{Fm \times m\mu}{F\mu - Fm}$, e pei punti E, H, così trovati, tirate la retta indefinita EH, che sarà la direttrice della sezione. Imperocchè avendovi abbassate le perpendicolari MG, mg, $\mu\gamma$: accagione de' triangoli simili gme, GME, si ha $MG : mg :: ME : mE :: FM : Fm$. E anche $mg :: \mu\gamma :: mH : \mu H :: Fm : F\mu$. Dunque queste perpendicolari sono tra loro come le rette MF, mF, μF . Dunque (780) la retta EH è la direttrice d'una sezione conica, che dè passare pei tre punti M, m, μ , e la cui specie dipende dal rapporto di FM a GM. Così se si fa passare per F la retta FA perpendicolare alla direttrice, questa sarà l' asse della sezione; e se si fa MG: FM :: AS: SF :: As: sF, o se si prenda $SF = \frac{FA \times FM}{FM + GM}$, ed $Fs = \frac{FA \times FM}{GM - FM}$, s'avranno i due vertici S, s dell' asse.

883. PROBLEMA III. *Ritrovare gli asintoti (fig. 74) d' un' Iperbole, della quale si anno solamente due diametri conjugati MO, DN.*

I. SOLUZ. Per l' estremità M del primo diametro MO tirate eg parallela al conjugato

Tomo II.

Dd

DN;

DN; fate Mg , ed Me uguali a CD , o CN e voi avrete i punti g , ed a , per dove gli asintoti devono passare.

884. II. SOLUZ. Congiungete le due estremità M , D de' due diametri, e per lo centro C , e per lo punto R metà di MD , tirato CR , che farà uno degli asintoti; l'altro farà la parallela a DM tirata dal centro C .

885. SCOLIO. Reciprocamente essendo dati gli asintoti, e un punto M dell' Iperbole, se ne trovano due diametri conjugati, tirando indefinitamente MD parallela all' asintoto CB , e facendo $DR = MR$; e le rette MC , DC saranno due semidiametri conjugati. Oppure tirando per M la tangente *eg* terminata agli asintoti, e facendo passare per C la retta CD parallela e uguale a Me , o Mg .

886. PROBLEMA IV. *Determinare il raggio di curvatura in un punto qualunque M d' una sezione conica (fig. 79. 80.)*.

SOLUZIONE. Avendo tirato per lo punto dato il diametro MO , e 'l suo conjugato DN con gli affi Ss , Ll ; supponete, che il punto K preso sopra MO , sia un punto della circonferenza del cerchio, che passa pei tre punti infinitamente vicini m , M , μ ; allora si ha (566) $\mu H \times Hm = MH \times HK$, ovvero $mH^2 = MH \times HK$: ma (820) $mH^2 : MH \times HO :: CD^2 : CM^2$. * Dunque $MH \times HK : MH \times HO :: CD^2 : CM^2$: Ovvero $HK : HO :: CD^2 : CM^2$. * E poichè MH è infinitamente piccola per rapporto ad mH , si ha $MK : MO$,
o $2CD$

$$o\ 2CM :: CD^2 : CM^2 . \text{ Dunque } MK = \frac{2CD^2}{CM} .$$

Sia ora MA il diametro del cerchio osculatore, o quello, che passa per $mM\mu$; avendo tirata la corda AK, il triangolo AKM è rettangolo in K, e simile al triangolo MCR rettangolo in R, poichè MH è perpendicolare all' arco μm , o alla sua tangente MX, e per conseguenza al diametro conjugato ND. Si ha dunque MR:

$$MC :: KM, o \frac{2CD^2}{CM} : MA = \frac{2CD^2}{MR} . \text{ Dun-}$$

$$\text{que } \frac{1}{2} MA = \frac{CD^2}{MR} , \text{ cioè a dire } I^o . \text{ Il}$$

raggio di curvatura in un punto qualunque M d'una sezione conica è uguale al quadrato del semidiametro conjugato a quello, che passa per lo punto dato, diviso per la perpendicolare tirata da questo punto sul diametro conjugato. Ma (863) MR

$$= \frac{CL \times CS}{CD} : \text{ Dunque } \frac{1}{2} MA = \frac{CD^2}{CL \times CS} ,$$

cioè a dire II^o. Il raggio di curvatura in un punto qualunque M d'una sezione conica è uguale al Cubo del semidiametro conjugato a quello, che passa per lo punto dato, diviso per lo prodotto de' due semiasse.

887. Dal foco F, e dal centro C siano abbassate sulla tangente in M le perpendicolari CI, FG: si ha (863) MR² : CS² ::

$$CL^2, o MR \times MN : CD^2 = \frac{CS^2 \times MN}{MR} .$$

$$\text{Ma } \frac{1}{2} MA = \frac{CD^2}{MR} ; \text{ dunque } \frac{1}{2} MA = \frac{CS^2 \times MN}{MR^2} .$$

Dd 2

Ma

Ma il parametro p dell'asse Ss è $p = \frac{2CL^2}{CS}$,

e $\frac{1}{2} p = \frac{CL^2}{CS}$; dunque $\frac{1}{2} p \times CS = CL^2 =$

$MR \times MN$; dunque $MR = \frac{p \times CS}{2MN}$, ed

$MR^2 = \frac{pp \times CS^2}{4MN^2}$. Dunque sostituendo, $\frac{1}{2}$

$MA = \frac{4MN^2}{pp} = \frac{MN^2}{\frac{1}{4}pp}$, cioè a dire. III°.

Il raggio di curvatura in un punto qualunque M d'una sezione conica, è uguale al cubo della normale diviso per lo quarto del quadrato del parametro dell'asse principale.

Nella Parabola la formola del raggio di curvatura è $\frac{(4px + pp)\sqrt{(4px + pp)}}{2pp}$. Impe-

rocchè (835) $NM^2 = px + \frac{1}{4}pp$: Dunque $4NM^2 = 4px + pp$, e $4NM^3 = (4px + pp)\sqrt{(px + \frac{1}{4}pp)}$. Or facendo entrare 4 nel radicale $\sqrt{(px + \frac{1}{4}pp)}$ senza cambiarne il valore, si ha (195) $\frac{1}{2}\sqrt{(4px + pp)}$: Dunque $4NM^3 = (4px + pp)\frac{1}{2}\sqrt{(4px + pp)}$, e $4NM^3 = \frac{(4px + pp)\sqrt{(4px + pp)}}{2}$. Nelle

altre sezioni le formole sono molto più complicate.

888. PROBLEMA V. *Ritrovare la quadratura delle sezioni coniche.*

SOLUZ. per la parabola. Sia proposto di quadrar lo spazio $SuMP$ (fig. 78) l'origine delle

delle ascisse essendo al vertice S; si ha $PM = y = \sqrt{px}$; sia $p = 1$; dunque $y = \sqrt{x}$,

o $y = x^{\frac{1}{2}}$. Dunque per avere la somma delle ordinate, comprese tra S, ed MP, e' non si

dè far altro, che sommare la serie $1^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{2}}, 4^{\frac{1}{2}}, \dots, x^{\frac{1}{2}}$; la somma è $(384) \frac{x^{\frac{3}{2}} + 1}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{5} \sqrt{x^3} = (194) \frac{2}{5} \sqrt{x}$, o per-

chè $y = \sqrt{x} = \frac{2}{5} xy$. Dunque lo spazio parabolico SMP è $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{5}$ del prodotto dell'ascissa per l'ordinata, o dell'area del parallelogrammo SPML.

889. COROL. I. Se si tira la retta SM, il segmento parabolico SMn è $\frac{1}{5} xy$; imperocchè la sua area è uguale all'area SPMn meno l'area del triangolo rettangolo SPM, cioè à dire uguale a $\frac{2}{5} xy - \frac{1}{5} xy = \frac{1}{5} xy$.

890. COROLL. II. L'area del segmento SMn è la metà dell'area del trilineo MnSL, perchè questo trilineo = $\frac{1}{5} xy$.

891. COROLL. III. Se il punto P fosse al foco, si avrebbe $x = \frac{1}{4} p$, e $y = \frac{1}{2} p$, dunque $\frac{2}{5} xy = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} p \times \frac{1}{2} p = \frac{1}{10} pp$. Cioè a dire l'area sarebbe $\frac{1}{10}$ del quadrato del parametro.

892. SOLUZ. per l'Ellissi. Contando le ascisse dal centro, l'equazione all'ellissi è $yy = \frac{abb - bby}{aa}$; o $yy = \frac{bb}{aa} \times (aa - xx)$;
Dd 3 dun-

dunque $y = \frac{b}{a} \times \sqrt{aa - xx}$. Dunque (779)

ciascuna di tutte le ordinate possibili tra CL, e PM (fig. 81) è $\frac{b}{a} \times a - \frac{b}{a} \times \frac{xx}{2a} - \frac{b}{a}$

$\times \frac{x^4}{8a^3} - \frac{b}{a} \times \frac{x^6}{16a^5} - \frac{b}{a} \times \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. .

O sia $b - \frac{bxx}{2aa} - \frac{bx^4}{8a^4} - \frac{bx^6}{16a^6} - \frac{5bx^8}{128a^8}$ &c. .

Dunque questa serie sommata tante volte quante sono le ascisse possibili da C fino a P, darà la somma di tutte queste ordinate, o l'area CLMP. Dunque supponendo per tutte queste ascisse la serie infinita 1. 2. 3. 4. 5. . . . x; si vede 1°. che $b \times x$, o bx esprime la somma di tutt' i primi termini b della serie $b - \frac{bxx}{2aa} - \frac{bx^4}{8a^4}$ &c. , 2°. Che la somma di tutt' i

secondi termini $-\frac{bxx}{2aa}$ è uguale a $-\frac{b}{2aa}$ moltiplicata per la somma di tutt' i quadrati de' termini della serie infinita 1. 2. 3. 4. 5. . . . x la qual è (383) $= \frac{x^3}{3}$; dunque la somma

di tutt' i secondi termini, $-\frac{bx^3}{6aa}$. 3°. Che

la somma di tutt' i terzi termini $-\frac{bx^4}{8a^4}$ è u-

guale a $-\frac{b}{8a^4}$ moltiplicato per la somma di tutte le quarte potenze de' termini della serie

1. 2. 3. 4. 5. . . . x , la qual' è $\frac{x^5}{5}$; dunque la somma di tutt' i terzi termini, è $-\frac{bx^3}{40a^4}$. Si trova similmente, che la somma di tutt' i quarti termini $-\frac{bx^6}{16a^4}$ è $-\frac{b}{16a^4} \times \frac{x^7}{7} = -\frac{bx^7}{112a^4}$; che quella di tutt' i quinti è $-\frac{5bx^9}{1152a^8}$, &c. Di maniera che lo spazio CLMP è espresso per la serie infinita $bx - \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^4} - \frac{5bx^9}{1152a^8} - \frac{7bx^{11}}{2816a^{10}} - \frac{21bx^{13}}{13312a^{12}}$, &c. la quale non ha potuto fino al presente essere sommata in termini finiti, lo che fa che la quadratura assoluta dell' Ellissi è incognita.

893. COROLL. I. Se si fa $x = a$, allora sostituendo, s' avrà $ab - \frac{1}{6} ab - \frac{1}{40} ab - \frac{1}{112} ab - \text{\&c.}$, per lo spazio compreso nel quarto d' ellissi CLMS. E se a , e b esprimono i due assi interi dell' ellissi, questa serie darà l' area intera dell' Ellissi.

894. COROLL. II. Se $a = b$ allora l' ellissi è un cerchio, e la serie $aa - \frac{1}{6} aa - \frac{1}{40} aa - \frac{1}{112} aa$, &c., dà la quadratura d' un quarto di cerchio, o d' un cerchio intero se a esprime il diametro.

895. COROLL. III. Indi segue, che l' area
Dd 4 d' un

d' un ellissi è a quella d' un cerchio descritto sopra il suo asse maggiore, come $ab - \frac{1}{6} ab - \frac{1}{40} ab - \frac{1}{112} ab$ &c., ad $aa - \frac{1}{6} aa - \frac{1}{40} aa - \frac{1}{112} aa$, &c., cioè, come ab ad aa , o come b ad a , e per conseguenza come l' asse minore è all' asse maggiore. E se il cerchio avesse l' asse minore per diametro, la sua area sarebbe a quella dell' Ellissi, come l' asse minore al maggiore.

896. Similmente la porzione CPNO del cerchio è alla porzione CPML dell' Ellissi, come l' asse maggiore è all' asse minore, o come a a b .

Imperocchè l' una è espressa per $ax - \frac{ax^3}{6aa} - \frac{ax^5}{40a^4}$, &c., e l' altra per $bx - \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4}$, &c..

Si può dire lo stesso delle aree PNS, PMS.

Tuttocciò è chiaro anche d' altronde, perchè queste sorte d' aree circolari non sono, che somme delle ordinate, le quali, come l' asse maggior è al minore, così sono (843) tutte esse ordinate alle ordinate corrispondenti dell' Ellissi, (la somma delle quali sono le aree ellittiche).

897. COROLL. IV. Se da un punto qualunque A preso sopra l' asse d' un ellissi iscritta, o circonscritta a un cerchio, si tirino all' estremità M, N d' una ordinata comune PN le rette AM, AN, l' area del settore circolare SAN è a quella

la del settore ellittico SAM come l'asse, *cb'* è il diametro del cerchio all'altro asse. Imperocchè l'area circolare SPN è in questo rapporto con l'area ellittica SMP: e l'area del triangolo rettangolo PAN, è a quella del triangolo PAM, che ha una stessa base PA, come PN a PM (595), o (843) CO a CL, cioè a dire come l'asse, che serve di diametro al cerchio è all'altro asse. Dunque (309) le aree totali SAN, SAM sono in questo istesso rapporto.

898. COROLL. V. *L'area d'un'ellissi è uguale a quella d'un cerchio, il cui diametro è mezzo proporzionale tra gli assi dell'Ellissi.* Sia = *d* il diametro di questo cerchio, si ha (.316) $dd = ab$. L'area del cerchio è (849) $dd - \frac{1}{6} dd$

$$- \frac{1}{40} dd \text{ \&c. } = ab - \frac{1}{6} ab - \frac{1}{40} ab, \text{ \&c. }$$

899. COROLL. VI. *Le superficie di due ellissi qualunque sono tra loro come i prodotti de' loro assi.* Imperocchè siano *a, b* gli assi dell'una, *c, d* gli assi dell'altra, le loro aree faranno $ab - \frac{1}{6} ab - \frac{1}{40} ab \text{ \&c. }, cd - \frac{1}{6} cd - \frac{1}{40} cd, \text{ \&c. },$ queste due serie sono evidentemente fra loro come *ab* a *cd*.

SOLUZIONE per l'Iperbole. Facendo = *b* il primo semiasse SC (fig. 77), e CL = *a*, l'ascissa BH = *x*, l'ordinata MH = *y*, si ha (840) $yy = \frac{aabb + bbxx}{aa}$, o $yy = \frac{bb}{aa} (aa + xx$

+ xx); dunque $y = \frac{b}{a} \sqrt{aa + xx}$: dunque ciascuna ordinata compresa tra CS, e HM è $b + \frac{bxx}{2aa} - \frac{bx^4}{8a^4} + \frac{bx^6}{16a^4} - \frac{5bx^8}{128a^4}$ &c., E comechè questa serie non differisce da quella dell' Ellissi, che ne' segni de' termini pari; onde facendo i raziocinj fatti per l' Ellissi, si trova 1°. Che l'area iperbolica SCHM dè esser espressa per la serie $bx + \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} + \frac{bx^7}{112a^4} - \frac{5bx^9}{1152a^4}$ &c. 2°. Chè se si toglie l'area del rettangolo SCHI = bx , resta l'area del trilineo iperbolico SIM = $\frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} + \frac{bx^7}{112a^4}$, &c., 3°. Che nell' Iperbole equilatera, ove $b = a$, se $a = x$, si ha $aa + \frac{1}{6} aa - \frac{1}{40} aa + \frac{1}{112} aa$ &c. E si può seguirar l' analogia tra l'iperbole equilatera, e un'iperbole qualunque, come s'è fatta quella, ch'è tra l'cerchio, e l'ellissi.

900. Per l' Iperbole tra i suoi asintoti. Sia proposto di quadrare lo spazio ARMZ (fig. 74) compreso fra le due ordinate AZ, RM. Avendo posta l'origine delle ascisse in R, sia $CY^2 = a$, $CR = b$, $RA = x$, $AZ = y$, si ha (870) $CA \times AZ = CY^2$, o $by + xy = aa$.

Dun-

427

Dunque $y = \frac{aa}{b+x} = \frac{aa}{b} - \frac{aax}{bb} + \frac{aaxx}{b^3} - \frac{aax^3}{b^4} + \frac{aax^4}{b^5} - \&c.$ (370). E la somma di ciascuno de' termini di questa serie preso tante volte quanti sono i termini della serie infinita 1. 2. 3. 4. 5. x , farà questa serie infinita $\frac{aax}{b} - \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^2}{3b^2} - \frac{aax^3}{4b^3} + \&c.$, uguale all'area ARMZ. Questa serie farà tanto più convergente, quanto x sarà più piccolo di b .

901. COROLL. Se si fa $b = a$, cioè a dire, se l'origine delle ascisse fosse in Y, lo spazio SYAZ farebbe $ax - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}\frac{x^3}{a} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{aa} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{a^2} - \&c.$, e se si fa $a = 1$, s'avrà $x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.$

902. SCOLIO I. Se avendo fatto $CY = 1$, si prendono le ascisse CR, CA, Ct in progression geometrica, sia $CA = f$, $At = z$, s'avrà dunque $f = b + x$, e $Ct = f + z$; dunque la progressione darà $b : b + x :: f : f + z$, e per conseguenza $\frac{x}{b} = \frac{z}{f}$; ond'è chiaro, che l'area RMZA, ch'è $\frac{x}{b} - \frac{x^2}{2b^2} + \frac{x^3}{3b^3} - \frac{x^4}{4b^4} + \&c.$, è uguale all'area AZkt, ch'è $\frac{z}{f}$

$\frac{z}{f} - \frac{z^2}{2f^2} + \frac{z^3}{3f^3} - \frac{z^4}{4f^4} , \&c. .$ Dunque *le aree iperboliche, che anno per base le differenze delle ascisse in progression geometrica, sono uguali fra loro.* Onde si vede, che se CY, CR, CA, Ct, sono ascisse tali, che rappresentino la serie delle quantità in progression geometrica $\div q^0, q^1, q^2, q^3$, le aree, delle quali YR, RA, At sono le basi, essendo uguali, le aree delle quali YR, YA, Yt sono le basi, sono tra loro come le serie de' numeri 1, 2, 3; Dunque esse sono come gli esponenti delle quantità CR, CA, Ct, e per conseguenza (337) come i Logaritmi di queste stesse quantità. Dunque *si possono calcolare i Logaritmi per mezzo dell' aree iperboliche, e reciprocamente.*

903. SCOLIO II. Se si volesse l'espressione dell' area compresa tra l'asintoto CB, la parte CR dell' altr' asintoto, l'ordinata MR, e 'l ramo infinito MSi: per cagion dell' equazione $aa = xy$ (871), sia CY, o $a = 1$: dunque $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ (168); ma (384) la somma

$$\text{ma di tutti gli } x^{-1} \text{ è } \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0} = \frac{1}{0};$$

Dunque perchè il quoziente di 1 diviso per 0 è infinito, questo spazio anch'è infinito.

Resta a vedere come le curve, che noi abbiamo considerate finora, sieno *sezioni coniche*.

904. Se si voglia tagliar un cono retto in due parti per mezzo d'un piano, non si potrà fare,

fare, che nelle quattro maniere, che seguono.

1°. O il detto piano sarà parallelo alla base del Cono, e allora è chiaro, che la curva, che terminerà li piani delle due parti tagliare, sarà un cerchio, poichè esso sarà un degli elementi del cono.

905. 11°. O il piano Sp (fig. 82) sarà parallelo a uno dei lati AB del cono, cioè a dire, farà su'l piano BC della base un'angolo SpC uguale a quello dei lati, o apotemi del cono; e allora la sezione sarà determinata da una curva indefinita $mMSM$: poichè se'l Cono fosse prolungato all'infinito, il piano il taglierebbe sempre nella stessa maniera; questa curva è la *Parabola*.

906. O il piano Sp (fig. 83) non essendo parallelo nè a un lato, nè alla base del Cono, farà più inclinato al piano CB della base, che non lo sono i lati del Cono; e allora è chiaro, che il piano potrà tagliare tutt' i lati del Cono, e che la sezione sarà determinata da una curva finita, che ritorna in se stessa, e questa è l' *Ellissi*.

907. O il piano Sp (fig. 84) farà meno inclinato alla base del cono, che no'l sono i suoi lati; e allora è chiaro, che questo piano non può tagliare da una parte, e dall' altra tutt' i lati del cono, e perciò la sezione $mMSM$ è una curva indefinita, e che se si posasse nel vertice A del Cono il vertice d' un' altro cono simile, il piano essendo prolungato, andrebbe a tagliare quest' altro cono in s nella stessa maniera.

nicra ; questa sezione è l' *Iperbole*, e le due insieme diconsi *Iperboli Conjugate*.

908. Egli è chiaro, che il piano *Sp* essendo perpendicolare al piano della base del cono, fa anche sezioni Iperboliche ; ma che, s'ei passa pe' l' vertice, e lungo l' asse del cono, queste iperboli diverranno triangoli rettilinei isosceli, e simili.

909. DIM. Per la Parabola. Fate passare (fig. 82) un piano parallelo a quello della base, la sezione sarà un cerchio *EMD*, perchè questo sarà uno degli elementi del cono. Or comechè i due cerchj *EMD*, *BmC* sono divis' in *MM*, e in *mm* per la sezione, poi in *ED*, e in *BC* dal piano del triangolo *ABC*, che si suppon' esser tra tutt' i piani triangolari, che traversano il cono lungo l' asse, quello, che sia perpendicolare al piano: egli è chiaro (633), che le rette *MM*, *mm* sono parallele fra loro, come anche i diametri *ED*, *BC*. Ma perchè il piano *ABC* è perpendicolare al piano *Sp*, *mm* è perpendicolare a *BC*, dunque *MM* è perpendicolare a *DE*. Inoltre i diametri *ED*, *BC* essendo divisi in *P*, e in *p* dall' asse *Sp* della sezione, quest' asse è (623) nel piano di questi diametri, o del triangolo *ABC*; dunque *MM*, ed *mm* sono anche perpendicolari ad *Sp*. Così le rette *pm*, *PM* sono ordinate comuni ai cerchj *BmC*, *EMD*, e alla sezione *mSm*. Frattanto (562) $pm^2 = Bp \times pC$, e $PM^2 = EP \times PD$: Dunque $pm^2 : PM^2 :: Bp \times pC : EP \times PD$. Ma per cagion delle
pa-

parallele AB , Sp , si ha $EP = Bp$; dunque (296) $pm^2 : PM^2 :: pC : PD$. E per cagione dei triangoli simili SPD , SpC , si ha $pC : PD :: Sp : SP$. Dunque $pm^2 : PM^2 :: Sp : SP$. Dunque la curva mSM è tale, che i quadrati delle sue ordinate sono tra loro come le loro ascisse; dunque (821) questa curva è una parabola.

910. Dimostrazione per l'Ellissi (fig. 83). Avendo fatti passare due piani paralleli alla base del cono, si avranno due cerchj EmF , GMH , che divideranno il piano della sezione, e si vedrà come quì sopra, che mp , MP sono ordinate comuni al cerchio, e alla sezione, e che per la proprietà de' cerchj si ha $mp^2 : MP^2 :: Ep \times pF : GP \times PH$. Ma accagione de' triangoli simili SPH , SpF , ed sEp , sGP , si ha $pF : PH :: Sp : SP$; ed $Ep : GP :: sp : sP$. Dunque (307) $Ep \times pF : GP \times PH :: sp \times Sp : sP \times SP$. Dunque $pm^2 : PM^2 :: sp \times Sp : sP \times SP$. Dunque la sezione sMS è una curva tale, che i quadrati delle ordinate sono fra loro come i prodotti delle ascisse: dunque è ella un ellissi (820). La dimostrazione sarebbe la stessa, se 'l solido ABC fusse un Cilindro retto.

911. DIM. Per l'Iperbole (fig. 84). Per cagione de' cerchj EMD , BmC , si ha $pm^2 : PM^2 :: Bp \times pC : EP \times PD$. Ma per li triangoli simili DPS , CpS , e psB , PsE , si ha $pC : PD :: pS : PS$, e $pB : PE :: ps : sP$. Dunque $pC \times pB : PD \times EP :: pS \times ps : PS$

sto accrescimento è cagionato da una quantità generatrice, che agisce per gradi uguali, e infinitamente piccoli, determinati però da una stessa legge. Questi gradi infinitamente piccoli si chiamano le *differenze*, o le *differenziali* della grandezza. * Le *differenze* dunque, o le *differenziali* d'una quantità sono i gradi infinitamente piccoli, cioè minori di qualunque assegnabile, ne quali s'intende crescere, o scemare una quantità *. E si chiama *calcolo infinitesimale*, quello, nel quale si fann'entrare l'espressioni di questi gradi per ricercare, o per dimostrare le proprietà della grandezza,

914. Si chiama *costante* ogni quantità, che si considera arrivata a un certo stato fisso * onde non ha più nè accrescimento, nè diminuzione, * e *variabile* quella, che si riguarda attualmente suscettibile d'accrescimento, o di diminuzione: così in un cerchio dato, il diametro è una costante, la corda è una variabile. S'esprimono ordinariamente le costanti per le prime lettere dell'Alfabeto, le variabili per le ultime.

915. S'esprime per d la differenziale d'una variabile: così adx significa il prodotto della costante a per l'accrescimento infinitamente piccolo della variabile x , di maniera che d non esprime alcuna funzione della quantità: ella serve soltanto di *caratteristica* per notare un'infinitamente piccolo.

916. Quando nel calcolo infinitesimale non si fa entrare, che l'espressione d'un infinitamente piccolo d'una, o più variabili, il cal-

culo si chiama *differenziale* ; ma quando per l'espressione di questi infinitamente piccoli , e per le proprietà delle grandezze , che ne sono affette , si cerca il valore finito di queste variabili , o , ciocch'è lo stesso , quando si cerca il risultato di tutti questi accrescimenti , il calcolo si chiama *integrale* . Così *differenziare una equazione* , o *una formola* , è cercare l'espressione algebrica delle quantità , che formano i gradi infinitamente piccoli d'accrescimento per ciascuna delle variabili , che sono nell'equazione , o formola proposta : e *integrare una equazione* , o *formola differenziale* , è ricercare quale ha dovuta essere l'equazione , o la formola , avanti d'essere stata differenziata : cioè ricercare il risultato di tutti gli accrescimenti , de' quali l'espressione differenziale ne contiene un grado infinitamente piccolo per ciascuna variabile .

917. Donde segue , che conoscendo la legge , secondo la quale una quantità dev'essere prodotta , egli è facile di trovare le differenziali di ciascuna variabile , che v'entra , e così il calcolo differenziale è sempre facile . Ma all'ispezione delle sole differenziali , non dev'esser facile dedurne questa legge in tutt'i casi ; il che fa , che il calcolo integrale sia soggetto a gran difficoltà .

918. Quel che si dice quì degli accrescimenti , dè intendersi anche de' decrescimenti ; poichè l'espressioni algebriche di queste due cose non differiscono fra loro , che per li segni + e — .

DEL

DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.

Formole differenziali.

L'Arte di differenziare una espressione algebrica, consiste in applicarvi quella delle formole seguenti, che conviene a questa espressione.

919. 1^o. *Differenziare* ax . Formola, adx .

DIM. Egli è chiaro, che DF (fig. 86) essendo l' accrescimento del lato variabile AD, nello stesso tempo, che il lato BD è costante, il parallelogrammo $ED = a \times dx$ è l' accrescimento del parallelogrammo $CD = ax$.

920. COROLL. La differenziale di $ax + by - cz$ è $adx + bdy - cdz$. Quella di $ab + bb - cy$, è $- cdy$. Quella di $aa - bcx$, è $- bcdx$.

921. *Differenziare* xy . Formola, $xdy + ydx$.

DIM. Nella figura 87. si vede, che per gli accrescimenti dx , e dy , il rettangolo CD è stato aumentato di tre rettangoli infinitamente piccoli, cioè xdy , ydx , e $dx dy$. Quest' ultimo dè esser trascurato, perchè è un infinitamente piccolo del second' ordine (361); dunque l' accrescimento infinitamente piccolo del rettangolo xy , è $xdy + ydx$.

922. OSSER. Se una delle due variabili va crescendo, mentre che l' altra va sce-

E c 2

man-

mando (fig. 88), la differenziale della variabile decrescente dev'esser negativa. Si ha quì $ydx - xdy$.

923. COR. I. La differenziale di xyz è $yzdx + xzdy + xydz$, supponendo che tutte queste variabili vadano crescendo; imperocchè sia $xy = p$: dunque $xyz = pz$, e $dp = ydx + xdy$; ma la differenziale di pz è (921) $pdz + zdp$, e mettendo xy per p , e $ydx + xdy$ per dp , si ha $xydz + yzdx + xzdy$. Similmente la differenziale di $uxyz$ è $xyzdu + uyzdx + uxzdy + uxzyd$.

924. COR. II. La differenziale di axy è $axdy + aydx$. Imperocchè sia $ax = p$; dunque $axy = py$, e $dp = adx$: ma la differenziale di py è $pdy + ydp$. Dunque sostituendo, si ha $axdy + aydx$.

925. COR. III. La differenziale di xx è $x dx + x dx = 2x dx$. Quella di $x^3 = 3x^2 dx$, quella di $x^4 = 4x^3 dx$, e in generale quella di $x^m = mx^{m-1} dx$. Quella di $\sqrt[n]{x^m}$, o di $x^{\frac{m}{n}}$ è

$\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$. Quella di $\frac{1}{x^m}$, o di x^{-m} è $-mx^{-m-1} dx$.

Quella di $\sqrt{(xy+yy)}$ è $\frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{(xy+yy)}}$. Quella di

$\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ è $\frac{-m dx}{n\sqrt[n]{x^{m+n}}}$. Imperocchè $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} =$

$x^{\frac{-m}{n}}$, la cui differenziale è $-\frac{m}{n} x^{\frac{-m}{n}-1} dx =$
ma

$$\text{ma } x^{\frac{-m-n}{n}} = \frac{1}{\frac{n}{n} \frac{m+n}{n} \sqrt{x}} : \text{ dunque } -\frac{m}{n} \times$$

$$\frac{1}{\frac{n}{n} \frac{m+n}{n} \sqrt{x}} \times dx = \frac{-mdx}{n \sqrt{x}}. \text{ La differenziale}$$

$$\text{di } \frac{a}{m+1} x^{m+1}, \text{ o di } \frac{ax^{m+1}}{m+1} \text{ è } ax^m dx, \text{ \&c.}$$

926. III. *Differenziare* $\frac{y}{a}$ Formola, $\frac{dy}{a}$.

DIM. Imperocchè nella figura 91. si vede che $dy : d\left(\frac{y}{a}\right) :: a : 1$.

927. IV. *Differenziare* $\frac{ay}{x}$. Formola;
 $\frac{axdy - aydx}{xx}$.

DIM. Nella figura 92. si ha $x + dx : y + dy :: a : \frac{ay}{x} + d\left(\frac{ay}{x}\right)$. Mettendo in equazione, si ha $\frac{axy}{x} + \frac{aydx}{x} + xd\left(\frac{ay}{x}\right) + dxd\left(\frac{ay}{x}\right) = ay + ady$. Riducendo, e togliendo l'infinitamente piccolo del second' ordine, si ha $\frac{aydx}{x} + xd\left(\frac{ay}{x}\right) = ady$, o $xd\left(\frac{ay}{x}\right) = ady - \frac{aydx}{x}$. Dunque $d\left(\frac{ay}{x}\right) = \frac{ady}{x} - \frac{aydx}{xx} = \frac{axdy - aydx}{xx}$.

E c 1

928.

928. COR. I. La differenziale di $\frac{x}{y}$ è $ydx - xdy$.

929. COROLL. II. La differenziale di $\frac{a}{x}$ è $-\frac{adx}{xx}$.

930. OSS. I. Comechè vi sono differenti ordini d'infiniti, e che questi ordini successivi sono in progression geometrica (359), si possono calcolare per le stesse formole assegnando i differenti ordini d'infinitamente piccoli per gli esponenti della caratteristica d . Per esempio ddx è un infinitamente piccolo del second' ordine, o $\frac{x}{\infty^2}$. Non s'impiegano gl'infinitamente piccoli al di sopra del second' ordine: e si chiamano gl'infinitamente piccoli del primo ordine *differenze prime*: quei del secondo ordine si chiamano *differenze seconde*, &c., queste sono le differenziali delle differenziali.

931. Così la differenza seconda di ax , è $addx$: quella di xy è $xddy + yddx + 2dxdy$; quella di xx è $2dxx + 2xddx$; (notate di passaggio, che dxx , o dx^2 è la stessa cosa che $dxdx$). In generale quella di x^m è $(mm-m)x^{m-2}dx^2 + mx^{m-1}ddx$. Imperocchè sia $x^{m-1} = y$: dunque $dy = (m-1)x^{m-2}dx$ (925). Sia anche $dx = z$: ciò posto, la differenza prima di x^m , ch'è $mx^{m-1}dx$, farà $= myz$. Ma la differenziale di myz è $mzdy + mydz$, o, ri-

o, rimettendo i valori, $m \times dx \times (m-1) x^{m-2} dx + m \times x^{m-1} \times ddx$. La differenza seconda di $\frac{a}{y}$ è $\frac{ayddy - 2ady^2}{y^3}$, &c.

632. Oss. II. Differenziando una quantità di già differenziata, accade quasi sempre, che la differenza prima d'una delle variabili è divenuta una quantità costante, o ch'ella dè esser ormai trattata come una costante. Per esempio avendo differenziata l'equazione d'una curva, se si cerca per una seconda differenziazione l'accrecimento ineguale delle ordinate, bisogna supporre le dx costanti, cioè a dire, bisogna cercare qual accrecimento ineguale risponde all'accrecimento uguale dell'ascissa. Così la differenza seconda di $\frac{ydy}{dx}$, prendendo dx per costante, è $\frac{dyy + yddy}{dx}$. La differenza di $mx^{m-1} dx = dy$, supponendo dy costante, è $(mm - m) x^{m-2} dx^2 + mx^{m-1} ddx = 0$.

Uti del Calcolo Differenziale.

933. **I**L calcolo differenziale basta per determinare quasi tutt'i sintomi delle curve; ma nella maggior parte delle ricerche fisico-matematiche, s'impiega il calcolo integrale per la soluzione compita de' Problemi. Noi

E c 4 da-

daremo solamente alcuni esempj dell' uso del calcolo differenziale nella teoria delle curve: impiegandovi le regole le più generali, e che non anno, riguardo alle linee del primo, e del second' ordine, nè eccezione, nè difficoltà nell' applicazione. Noi non entreremo nel dettaglio delle cautele, che fa d' uopo prendere per applicarle alle curve d' altro genere. Questo sarebbe far un compito Trattato del calcolo differenziale.

Uti per trovar le tangenti, sottangenti, normali, e sunnormali.

934. **E**gli è evidente, che per tirare una tangente in un punto dato sopra una curva, bisogna determinare sopra l' asse, su' l' diametro, o sopra qualche linea data di posizione, un punto per dove la tangente dè passare, per aver due punti, che ne determinino la posizione; o pur bisogna trovare anche un punto per dove dè passar la normale al punto dato sulla curva, affin d' alzarvi una perpendicolare dal punto dato.

Sia (fig. 93. e 94.) SR la tangente, che passa per lo vertice dell' asse, o del diametro, sia MP l' ordinata al punto M dato: sia *pm* un' altra ordinata infinitamente prossima terminata alla tangente TM. Per M tirate Rr parallela al diametro, o all' asse, e dallo stesso pun-

441

punto M tirate MN perpendicolare alla tangente, o alla curva; allora nel triangolo infinitesimale rMm , dove $rM = dx$, $rm = dy$ s' avranno le formole seguenti...

$$935. \quad PT = \frac{ydx}{dy}. \text{ Perchè } rm : rM :: MP.$$

$$PT, \quad * \quad dy : dx :: y : \frac{ydx}{dy} *.$$

$$936. \quad ST = \frac{ydx - xdy}{dy}. \text{ Imperocchè } ST =$$

$$PT - PS : \text{ ma } PS = x = \frac{xdy}{dy}.$$

$$937. \quad SB = \frac{ydx - xdy}{dx}. \text{ Imperocchè } PT :$$

$$TS :: PM : SB ; \text{ o } MR : mr :: TS : SB.$$

E queste non convengono, che a' punti delle curve per rapporto agli assi (fig. 94).

$$938. \quad Mm = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} : \text{ o se si fa } Mm = ds, \quad ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}.$$

$$939. \quad PN = \frac{ydy}{dx}. \text{ Imperocchè } rm : Mr :: PM : PN.$$

$$940. \quad TM = \frac{y\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{dy} = \frac{yds}{dy}.$$

$$\text{Perchè } rm : Mm :: PM : TM.$$

$$941. \quad TB = \frac{\sqrt{(dy^2 + dx^2)}(ydx - xdy)}{dx dy}.$$

$$\text{Perchè } rm : Mm :: SB : TB.$$

$$942. \quad MB = \frac{x\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{dx}. \text{ Perchè } Mr : Mm :: SP : MB.$$

943. $MN = \frac{y\sqrt{dy^2 + dx^2}}{dx}$. Perchè
 $Mr : Mm :: PM : MN$.

944. $TN = \frac{ydx}{dx} + \frac{ydy}{dx}$. Perchè $TN = TP + PN$.

945. Per applicar queste formole generali alle curve, bisogna differenziarne l'equazione, combinarne le dx , e dy , in maniera, che ne risulti un'equazione, della quale qualcheduna delle formole precedenti sia un membro, e che l'altro non racchiuda, che quantità finite.

Sia per esempio l'equazione alla parabola $yy = x$; facendo il parametro = 1. La differenziale è $2ydy = dx$: dunque $2y = \frac{dx}{dy}$.

Dunque $2yy = \frac{ydx}{dy}$; o perchè $yy = x$, si ha

$2x = \frac{ydx}{dy}$. Questo secondo membro è 'l valore di PT , dunque nella parabola si ha $PT = 2x$ come sopra (826). Similmente da $2ydy = dx$, si conchiude $ydy = \frac{1}{2}dx$, e $\frac{1}{2} = \frac{ydy}{dx} =$

PN , onde segue, che nella Parabola la subnormale è uguale al semiparametro, come sopra (823).

946. Sia anche l'equazione all'Ellissi $aayy = 2abbx - bbxx$ (810); dunque differenziando $2aaydy = 2abbdx - 2bbxdx$; togliendo 2, e moltiplicando per y , si ha $aayydy = abbydx =$
 $bbxydx$

— $bbxydx$; donde si tira $\frac{aayy}{abb - bbx} = \frac{ydx}{dy} =$

PT. Sostituendo il valore di $aayy$, e riducendo, $\frac{2ax - xx}{a - x} = PT$, come al nu° . 825.

Si troverà $ST = \frac{ax}{a - x}$ come al nu° . 828,

togliendo x da un lato, e $\frac{xdy}{dy}$ dall' altro nell'

equazione $\frac{2ax - xx}{a - x} = \frac{ydx}{dy}$; ella diverrà $\frac{ax}{a - x}$

$= \frac{ydx - xdy}{dy} = ST$ (936). Egli è l' istesso

de' valori analitici delle altre linee, che appartengono al punto del contatto in tutte le altre sezioni coniche, e altre curve.

Per trovare i raggi di curvatura delle Curve.

FRa molte maniere di far questa ricerca, noi sceglieremo questa per servir d' esempio.

947. Sia (fig. 95) una curva qualunque **SMK**, il suo asse **SN**: Si dimanda la sua curvatura al punto **M**, o nell' arco infinitamente piccolo **Mm**. Immaginatevi, che pei tre punti, che formano l' arco **Mm**, si sia fatto passare un cerchio, il cui centro sia **C**: allora **MC**, o **mC** farà il raggio di curvatura domandato. Tirate le ordinate **MP**, **mp**: la normale del punto **M** farà **MN**, e la sunnormale **PN**.

PN. Ciò posto, Mm , o $ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$;
 $MN = \frac{yds}{dx}$, e $PN = \frac{ydy}{dx}$, come s'è veduto
 nell' articolo precedente. Dunque $SN = x + \frac{ydy}{dx}$. Or Nn è una differenziale di SN , ci bi-
 fogna dunque differenziare $x + \frac{ydy}{dx}$, e facen-
 do dx costante, si ha $Nn = dx + \frac{dy^2 + yddy}{dx}$
 $= \frac{dx^2 + dy^2 + yddy}{dx} = \frac{ds^2 + yddy}{dx}$. Tirate
 MB parallela all' asse, e i triangoli rettangoli
 simili MmB , Ntn danno $Mm : MB$, o $Pp ::$
 $Nn : Nt$; ovvero $ds : dx :: \frac{ds^2 + yddy}{ds} : Nt = ds$
 $+ \frac{yddy}{ds}$. Dal punto N tirate a Cm la paral-
 lela NI , che dà $Nt = Im$; e per conseguen-
 za $IM = Mm - Im = ds - ds - \frac{yddy}{ds}$
 $= - \frac{yddy}{ds}$.

Finalmente i triangoli rettangoli simili IMN ,
 MmC danno $IM : MN :: Mm : MC$, o $-\frac{yddy}{ds} : \frac{yds}{dx} :: ds : MC = \frac{ds^2}{-dxddy} = \frac{ds^2 ds}{-dxddy}$;
 e mettendo $dy^2 + dx^2$ in luogo di ds^2 , si ha
 la formola generale del raggio di curvatura per
 tutte le curve rapportate a un asse, $MC =$
 $\frac{(dy^2 + dx^2) \sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{-dxddy}$.

948. Per applicar questa formola alle curve date, bisogna cercar, per mezzo dell' equazioni della curva, i valori di dx , dx^2 , dy^2 , — ddy , di maniera che nell' espressione di ciascuno di questi valori non v' entri, se non che y , e le costanti: per la sostituzione, la formola generale si troverà ridotta a quantità finite.

Per esempio nella Parabola, ove $yy = px$, si ha $2ydy = p dx$, dunque $dx = \frac{2ydy}{p}$, e $dx^2 = \frac{4yydy^2}{p^2}$. Differenziando, $dx = \frac{2ydy}{p}$, ove dx dev' essere una costante, poichè così s' è presa nel calcolo della formola generale, si ha $0 = \frac{2dy^2 + 2yddy}{p}$. Essendo il primo membro uguale a 0, la frazione si toglie facendo $0 = 2dy^2 + 2yddy$: dunque $-2yddy = 2dy^2$; e $-ddy = \frac{dy^2}{y}$. Sostituendo dunque, si ha il denominatore della formola $- \frac{dxddy}{2ydy^3} = \frac{2dy^3}{py}$: indi $dx^2 + dy^2 = \frac{4yydy^2}{pp} + dy^2 = \frac{4yy^2dy^2 + ppy^2}{pp} = \frac{dy^2}{pp} (4yy + pp)$: infine $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dy}{p} \sqrt{(4yy + pp)}$. Dunque la formola generale diverrà $\frac{dy}{p} (4yy + pp) \frac{dy}{p} \sqrt{(4yy + pp)}$, essendo il tutto diviso

vifo per $\frac{2dy^2}{p}$, o (95) moltiplicato per $\frac{p}{2dy^2}$, lo che fi riduce a $\frac{(4yy+pp)\sqrt{(4yy+pp)}}{2pp}$, e queſta è l'eſpreſſione del raggio di curvatura in un punto qualunque della Parabola. Se ſi ſoſtituiſce $4yy$ a $4px$ s' avrà la formola del numero 887.

Per trovare i Maſſimi, e Minimi.

949. **Q**Uando la legge, ſeconda la quale una quantità è prodotta, eſigge, che queſta quantità, o che una funzione di queſta quantità creſca ſino a un certo punto, e poi ſcemi, ſi può domandare, qual'è ſtato il ſuo valore quando ella era la più grande, e quando, o in qual luogo ella s'è trovata la più grande: o pure ſe la quantità dè ſcemare ſino a un certo punto, poi andare creſcendo, ſi può domandare qual'è ſtato il ſuo valore quando ella era la più piccola, e quando è ch'ella vi ſi è trovata: ciò ſi chiama cercare il *Maſſimo*, o il *Minimo*; e'l metodo, che vi s'impiega, ſi chiama il Metodo de' *Maſſimi*, e *Minimi*.

950. Egli è evidente, che nel punto, nel quale la quantità è divenuta la più grande, il ſuo accreſcimento è divenuto nullo, e che nel punto nel qual'è divenuta la più piccola,
il

il suo decrefcimento è anche divenuto nullo. Onde fegue, che avendo differenziata l'equazione, ch'efprime la quantità, della quale fi tratta, bisogna fare $= 0$ la differenziale della variabile, che va crefcendo, e poi fcemando, o fcemando, e poi crefcendo; e l'equazione differenziata effendo ridotta per quefto metodo a termini finiti, ella efprimerà il maffimo, o il minimo, che fi cerca.

951. Per efempio nell'Elliffi le ordinate all'affe maggiore vanno crefcendo, e poi fcemando. Se dunque fi può fapere in qual punto è la maggiore ordinata, bisogna differenziar l'equazione all'Elliffi la qual è (810) $aayy = 2abbx - bbyx$; fi ha dunque $2aaydy = 2abbdx - 2bbxdx$; facendo $dy = 0$, il primo membro diviene nullo, e fi ha $0 = 2abbdx - 2bbxdx$ oppure $2bbxdx = 2abbdx$, che fi riduce ad $a = x$. Lo che fa vedere, che la maggior ordinata, è nel punto in cui l'afciffa correfponde al centro dell'Elliffi. Per aver il valore di quefta ordinata la più grande, bisogna mettere a nell'equazione dell'elliffi, in luogo di x , ella fi ridurrà ad $y = b$: dunque quefta ordinata la più grande è la metà dell'affe minore.

952. Comechè quefto metodo è molto importante è neceffario formarfene un idea chiara, foprattutto quando un'efpreffione data è una formola, e non una equazione. Noi vi perverremo in rapprefentando per una curva tutt' i valori poffibili d' una variabile x la cui

cui legge è espressa per una formola algebrica. Come se $0, 1125x^4 - 0, 725x^3 + 0, 9735x^2 + 0, 875x$ esprimesse la legge, secondo la quale x varia: si supporrà prima, che questa formola è il primo membro d'un'equazione a una curva geometrica, e che il secondo membro è y . S'avrà dunque $0, 1125x^4 - 0, 725x^3 + 0, 9735x^2 + 0, 875x = y$: indi per descrivere la curva si farà successivamente, $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, \&c.$, e avendo sostituiti questi numeri nell'equazione, si troveranno i valori di y , come si vede nella tavola che segue.

x	y	
o ascisse,	o ordinate	Si tirerà una linea indefinita PE [fig. 97] per essere la linea delle ascisse; e avendo preso un punto S a piacere, per essere l'origine delle ascisse, si noteranno le parti uguali a i punti A, B, C, D, E, &c. Si alzeranno le perpendicolari Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c., e si faranno successivamente uguali alla lunghezza delle ordinate, che sono nella tavola, così Aa = 1, 2; Bb = 1, 5; Cc = 0, 6; &c.. Si farà infine passare una curva pei punti S, a, b, c, &c.
o 0		
1 1,2		
2 1,5		
3 0,6		
4 0,9		
5 7,5		
6 28,2		
7 73,5		
&c.		

Ciò posto, all'ispezione di questa curva, si vede che le ordinate vanno crescendo fin verso r , poi scemando fin verso z , indi crescen-

scendo rapidamente verso e . Si vede ancora che nel *massimo* la curva volta la sua concavità verso l'asse; e nel *minimo* la sua convessità. Si può dunque domandare il punto R dove corrisponde il *massimo* Rr, e 'l valore Rr di questo *massimo*; indi il punto T, ove corrisponde il *minimo*, e 'l valore Tt di questo *minimo*.

953. Avendo differenziata l'equazione della curva, si ha $0,45x^3 dx - 2,175x^2 dx + 1,875x dx + 0,875 dx = dy$: facendo $dy = 0$, e dividendo tutto per dx , resta l'equazione $0,45x^3 - 2,175x^2 + 1,875x + 0,875 = 0$, della quale le tre radici sono $x = 1,6925$; $x = 3,472$; $x = -3,891$. Sostituendo successivamente questi valori di x nell'equazione primitiva alla curva, si trova $y = 1,578$; $y = 0,342$; e $y = 0,675$. Se dunque si prende $SR = 1,6925$, ed $Rr = 1,578$, s'avrà il luogo, e la grandezza del *massimo* domandato: se si fa indi $ST = 3,472$, e $Tt = 0,342$, s'avrà il punto, e 'l valore del *minimo*.

954. Riguardo alla radice negativa $x = -3,891$, e l'ordinata corrispondente $y = 0,675$, egli è chiaro, che se alla sinistra del punto S si prenda $SP = 3,891$, e $Pp = 0,675$, s'avrà un punto p , che appartiene a una porzione della curva situata verso la sinistra del punto S, e che si sarebbe descritta prendendo le ascisse $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$. &c..

Questo punto p è anche un *massimo*, o un *minimo* in questa porzione.

955. Se l'equazione del *massimo*, o del *minimo*, che risulta dalla differenziazione, non ha, che radici immaginarie, egli è un segno evidente, che non vi è nè *massimo*, nè *minimo*, nell'espressione della quale si tratta.

956. Oss. I. Poichè le dx si prendono sopra una stessa retta, le dy corrispondenti non possono terminare a una curva, e guardar nello stesso tempo un rapporto costante con queste dx . Imperocchè allora le ordinate sarebbero alle ascisse sempre in questo rapporto costante, poichè le ordinate farebbero una somma d'antecedenti, e le ascisse una somma di conseguenti sempre nella stessa ragione (310). La linea alla quale terminano le ordinate non potrebb'essere, che una retta, qual'è l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo (vedete la fig. 96). Onde segue, che in una curva il rapporto di dy a dx dà sempre variare, e che poichè si prendono le dx sopra una stessa retta, egli è naturale di farle costanti per paragonarle più facilmente alle dy , le quali devono per conseguenza variar continuamente.

957. Oss. II. Per la natura del *massimo*, o del *minimo* rappresentato da una curva geometrica, le tangenti a' punti r , s deggiono esser parallele alla linea delle ascisse SD , poichè in questi punti la lezione del punto descrivente non l'avvicinerebbe, ne l'allontanereb-

rebbe dall' asse SD . Dunque in questi punti r, s , le sottangenti sono infinite, le normali sono uguali alle ordinate rR, sT , e le subnormali sono nulle. Così, *si può trovare il massimo, e il minimo per le formole differenziali per le tangenti*. Si vede anche, che nel passaggio per lo *massimo*, e *il minimo*, la sottangente, e la normale tendono a prender una situazione opposta a quelle, ch' esse aveano prima di questo passaggio; si può anche decidere per questo cambiamento, se 'l valore trovato per l' applicazione della regola generale de' *massimi*, e *minimi*, è quella d' un *massimo*, o un *minimo*. Poichè è chiaro al veder solo la fig. 97, che se l' espressione della sottangente dà da positiva diventar negativa, il valore avuto pe' l' Calcolo è un *massimo*. Se la sottangente dà da positiva diventar negativa, il valore ritrovato è un *minimo*.

958. Oss. III. Frattanto può accadere, che passando dall' accrescimento al decrescimento, dy sia divenuto infinito per rapporto a dx . Imperocchè, per non cercar esempio in altre curve, che nelle sezioni coniche, se si esamini il cammino d' un punto, che descrive le quattro iperboli conjugate (le quali (850) non sono propriamente, che una sola, e stessa curva chiusa), egli è chiaro che lungo uno de' rami, cominciando al vertice, il punto descrivente è all' estremità d' un ordinata y , la cui dy va sempre crescendo, in maniera, che all' estremità infinita di questo ramo, e

F f 2 al

al passaggio del punto descrivente nel ramo conjugato, dy è infinitamente grande per rapporto a dx : ma egli dà indi scemare continuamente finchè il punto descrivente sia arrivato al vertice di questo ramo conjugato, e così in appresso. Onde si vede, che non bisogna sempre far $dy = 0$ per avere un *massimo*, o un *minimo*: * e che se facendo $dy = 0$ non si può conchiudere niente per lo *massimo*, o per lo *minimo*, * si può cercare questo punto facendo $dy = \infty$.

REGOLE, E USI DEL CALCOLO INTEGRALE.

Comechè il calcolo integral è soggetto a gran difficoltà, non ne possiamo dar qui, che una leggiera idea, con uno, o due esempi ne' casi più semplici.

959. La lettera f (iniziale della parola *somma*) serve di caratteristica per indicare una integrazione da farsi: così $\int adx$ significa, che bisogna integrare adx : (si pronunzia *somma adx*).

960. Il calcolo integrale essendo l'inverso del differenziale si possono prendere per formule delle integrali le quantità, che sono state differenziate qui sopra (dal n° . 919. fino a 933). Così $\int adx = ax$, $\int (xdy + ydx) = xy$, &c., ma perchè differenziando l'espressioni al-

gebraiche, i termini composti di quantità tutte costanti svaniscono, ci bisogna ritrovarli nell'integrazione, così $\int dx = x$, o $= x$ più, o meno una, o più costanti, e quelle sono le circostanze del problema, che s'anno a trovare, quando bisogna aggiungere le costanti alle integrali, e quali sono queste costanti: se ne vedrà un esempio in appresso (970).

961. Quando non v'hà, che una variabile in una espressione differenziata, o quando una differenziale è composta d'un solo termine, se ne trova facilmente l'integrale per la formola del numero 925. secondo la quale

$$\int ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1}, \text{ che si può enunciare con}$$

questa regola. *Togliete la differenziale, aumentate d'una unità l'esponente della variabile, e dividete il tutto per quest'esponente così aumentato.*

962. L'arte quasi tutta del calcolo integrale consiste in applicar questa regola all'espressioni differenziate, e in farvi le preparazioni necessarie per metterle in istato d'essere integrate per mezzo di questa regola. E quando un'espressione differenziata non è suscettibile di preparazioni proprie a menarla a integrazione compita, si procura di trasformarla in qualche altra, il cui integrale sia lo stesso, che quello, che darebbe la quadratura, o la rettificazione d'una sezione conica, o anche d'una curva d'un'ordine più elevato, o la stessa di quella, ch'esprimerebbe il logaritmo d'un numero, o d'un seno, &c..

Or come la quadratura, e la rettificazione della maggior parte di queste curve non an potuto ancor esser determinate in rigor geometrico, e che la maggior parte de' seni sono incommensurabil per rapporto al seno totale; ei segue, che in questi casi, queste spezie d'integrazioni non sono determinate, che per approssimazione; o che non si possono ridurre in numeri, che pres' appoco. Finalmente per ultimo rifugio, si cerca la serie infinita, la cui somma sarebbe uguale all' integrale, che si cerca. Dunque si vede facilmente dall' esposto fin quì, che il calcolo integrale l'è un'arte non solo assai incompita, ma anch' estremamente intrigata, e che non arriva sovente, che ad approssimazioni. Perciò noi ci contenteremo d' apportar quì alcuni esempj dell'uso di questo calcolo in geometria, e soprattutto nella parte la più facile, ch'è quella delle serie, per far vedere la corrispondenza di quelle, che noi tireremo dal calcolo integrale con quelle, che noi abbiám dedotte dall' analisi comune, quando abbiám parlato delle sezioni coniche.

963. L' uso del calcolo integrale nella Geometria pura, consiste principalmente in trovar le quadrature delle superficie piane, e curve; le cubature, o solidità de' corpi; la rettificazione delle curve, cioè la lunghezza d' una linea retta uguale a un' arco di curva dato; la natura, o l' equazione d' una curva per l' espressione algebrica data della sua tangente,
o for-

o sottangente , o normale , o funnormale , &c. . Ma egli è quas' impossibile di profundarsi con profitto in alcuna delle Scienze Fisiche Matematiche , senza il soccorso continuo di questo calcolo .

*Per la Quadratura delle superficie Piane ,
e Curve .*

964. **E**gli è chiaro , che la quadratura d'uno spazio CPML (fig. 67) è la somma de' piccoli parallelogrammi *pqmn* , de' quali l' espressione differenziale è ydx : dunque la formola per la quadratura degli spazj chiusi tra un arco di curva , due ordinate , e la porzione dell' asse , nel quale terminano le ordinate , è $\int ydx$.

965. Nella Parabola , ove $px = yy$ si ha $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$, e $p^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{x^{\frac{3}{2}}}$: dunque $ydx =$

$p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$. E integrando per la regola generale

(961) s' avrà $\frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} + 1} = p^{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{3} \times x^{\frac{3}{2}}$,

e mettendo $\frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$ in luogo di $p^{\frac{1}{2}}$, s' avrà final-

mente $\frac{2yx^{\frac{3}{2}}}{3x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}xy$. Questa è la quadratura esat.
F f 4

esatta della parabola (888).

966. Nell' Ellissi s'è trovato (892) che
 $y = \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)}$; e poichè $\sqrt{(aa - xx)}$
 è un incommensurabile, si può togliere il se-
 gno radicale riducendo $\sqrt{(aa - xx)}$ in una se-
 rie infinita, come s'è veduto (371). S'avrà
 dunque $y = \frac{b}{a} \left(a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \right.$
 $\left. \frac{5x^8}{128a^7}, \&c., \right) = b - \frac{bx^2}{2a^2} - \frac{bx^4}{8a^4} - \frac{bx^6}{15a^6}$
 $- \frac{5bx^8}{128a^8} \&c.$ e però $ydx = bdx - \frac{bx^2dx}{2a^2} -$
 $\frac{bx^4dx}{8a^4} - \frac{bx^6dx}{16a^6} - \frac{5bx^8dx}{128a^8}, \&c.$ Dunque
 prendendo gl' integrali di ciascuno di questi ter-
 mini (961), s'avrà la quadratura dell' Ellissi
 $bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}, \&c.$
 come al numero 892.

967. Si calcolerà nello stesso modo la qua-
 dratura del cerchio, e dell' iperbole.

968. Riguardo alle quadrature delle superfi-
 cie curve de' solidi formati per la rotazione d'una
 curva intorno al suo asse; si trovano facilmen-
 te in questa maniera. Egli è chiaro, che cia-
 scuno di questi lati infinitamente piccoli di que-
 sta curva descrive con la sua rotazione un
 cono retto troncato infinitamente piccolo,
 ch'è uno degli Elementi del solido generato.
 La superficie di questo cono troncato è (696)
 uguale al prodotto della lunghezza $\sqrt{(dx^2 +$
 $ay^2)}$

dy^2) di questo lato, moltiplicato per la circonferenza descritta dal punto di mezzo di questo lato, cioè per la circonferenza descritta dall'estremità dell'ordinata y . Se dunque si fa, come un raggio qualunque r è alla sua circonferenza c , così l'ordinata y è a $\frac{cy}{r}$ circonferenza descritta dal punto, ove termina questa ordinata; s'avrà $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} \times \frac{cy}{r}$ per la superficie d'un'elemento qualunque

del solido, e $\int \frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ per la formula d'integrazione, che darà tutta la superficie curva di questo solido.

969. S'ella è per esempio una parabola, che gira intorno al suo asse, si ha $adx = 2ydy$; dunque $dx^2 = \frac{4yydy^2}{aa}$, e $\frac{cy}{r} \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \frac{cy}{r} \sqrt{(dy^2 + \frac{4yydy^2}{aa})} = \frac{cy}{r} \sqrt{\frac{aady^2 + 4yydy^2}{aa}} = \frac{cydy \sqrt{(aa + 4yy)}}{ar}$ (194). Per ridurre

questa espressione in una forma, alla quale la regola generale dell'integrazione sia applicabile: sia $\sqrt{(aa + 4yy)} = z$; dunque $aa + 4yy = z^2$; e differenziando, $8ydy = 2zdz$. Dunque $ydy = \frac{zdz}{4}$. Sostituendo, $\frac{cydy \sqrt{(aa + 4yy)}}{ar}$ diviene

$\frac{cz^2dz}{4ar}$, il cui integrale è $\frac{cz^3}{12ar} = \frac{cz^3c}{12ar}$, e rimettendo

tendo i valori di z , si ha $\frac{c(aa+4yy)\sqrt{(aa+4yy)}}{12ar}$
per lo valore, che si cerca.

970. Ma per esaminare se ci bisognino alcune costanti da aggiugnere, o da sottrarre, bisogna vedere, se facendo $y = 0$, la formola diviene $= 0$; imperocchè nel solo punto del suo vertice, il solido non può avere alcuna superficie finita; ma la formola diviene $\frac{aac}{12r}$; dunque ne bisogna togliere questa costante, e far la formola, che dà la vera superficie curva cercata, $\frac{c(aa+4yy)\sqrt{(aa+4yy)}}{12ar} -$

$$\frac{aac}{12r} = \frac{c(aa+4yy)\sqrt{(aa+4yy)} - a^3c}{12ar}$$

Questa specie di solido si chiama *cono doppio Parabolico*.

Per la rettificazione delle Curve.

971. **L**A rettificazione delle curve per rapporto a un asse si fa per l'integrazione della formola $ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$. Egli non è necessario di darne un gran numero d'esempi, perchè vi sono pochissime curve d'uso, la cui rettificazione esatta sia possibile.

972. S'è veduto (948.) che nella parabola $\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dy \frac{\sqrt{(pp+4yy)}}{p} =$
 dy

$dy \sqrt{(1 + 4yy)}$, facendo $p = 1$. Questo radicale cangiato in serie (371) è $1 + 2y^2 - 2y^4 + 4y^6 - 10y^8$, &c... Dunque $\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dy + 2y^2 dy - 2y^4 dy + 4y^6 dy - 10y^8 dy$, &c.; L'integrale di ciascun termine trovato per la regola generale è $y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}y^5 + \frac{4}{7}y^7 - \frac{10}{9}y^9$, &c., che dà la lunghezza d'una linea retta, che sarebbe stata piegata sulla parabola, dal suo vertice fino a che s'incontri con l'ordinata y .

973. Nel cerchio supponendone il raggio = 1, si ha $yy = 2x - xx$, e per conseguenza $2ydy = 2dx - 2xdx$, lo che dà $dx = \frac{ydy}{1-x}$, e

$$dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{1 - 2x + xx}, \text{ ma perchè } 2x - xx$$

$$= yy, \quad dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{1 - yy}; \text{ dunque } dx^2 + dy^2 =$$

$$\frac{y^2 dy^2}{1 - yy} + dy^2, \text{ o, mettendo il tutto in fraz-}$$

$$\text{zione, farà } \frac{y^2 dy^2 + dy^2 - y^2 dy^2}{1 - yy} = \frac{dy^2}{1 - yy}, \text{ e}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}} = dy(1 - yy)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or per la formola (n° . 192), questa espressione $(1 - yy)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{8}y^4 + \frac{5}{16}y^6 +$

$\frac{35}{128}y^8$, &c... Dunque $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy + \frac{1}{2}y^2 dy + \frac{3}{8}y^4 dy + \frac{5}{16}y^6 dy + \frac{35}{128}y^8 dy$, &c., il cui integrale è $y + \frac{1}{4}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7$, &c., che può essere rappresentata

for-

sotto questa forma $y + \frac{1}{2.3} y^3 + \frac{1.3}{2.4.5} y^5 +$
 $\frac{1.3.5}{2.4.6.7} y^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} y^9 \&c.$

974. Un'ordinata al cerchio è il seno dell' arco compreso tra l'origine delle ascisse, e dell'ordinata. Si può dunque con l'ajuto di questa serie, calcolar la lunghezza d'un arco di cerchio, il cui seno è cognito, e questa serie farà convergente tanto più velocemente, quanto il seno risponderà a un arco d'un più piccolo numero di gradi, perchè questa farà una frazione del raggio, che farà ancor altrettanto più piccola. Così si può calcolare con assai facilità la lunghezza dell'arco di 30 gradi per mezzo del suo seno, ch'è $= 0,5$: e moltiplicando questa lunghezza per 6, s'avrà quella della semicirconferenza, e per conseguenza il rapporto del diametro del cerchio al suo contorno, ciò che darà la quadratura del cerchio. S'avrà per esempio $0,5 + 0,020833 + 0,002344 + 0,000349 + 0,000059$: La somma è $0,523585$: il suo prodotto per 6, è $3,14151$ presso a poco come s'è veduto (615). Per maggior esattezza bisogna calcolare più termini, e più decimali.

Per la Cubatura de' Solidi.

975. **L**A cubatura, o solidità de' Solidi si trova per l'integrazione dell'espressione differenziale della solidità d'uno degli elementi, de' qual' il corpo è composto. Per esempio quando il solido è prodotto per la rotazione d'una curva intorno il suo asse, ciascuno elemento è un cono retto troncato, la cui solidità dè esser uguale al prodotto del suo asse, o grossezza dx per la superficie del cerchio descritto dall'ordinata y , che passa per la metà del lato infinitamente piccolo, che forma la superficie di questo cono. Ma il cerchio (968) descritto dall'ordinata y , ha $\frac{cy}{r}$ per l'espressione della sua circonferenza, e per conseguenza (602) $\frac{cy}{2r} \times y$, o pure $\frac{cy^2}{2r}$ è quella della sua superficie. Dunque l'espressione generale della cubatura d'un'elemento qualunque d'un solido di rivoluzione è $\frac{cy^2 dx}{2r}$; e la formola d'integrazione, che dà la solidità di questo solido; è $\int \frac{cy^2 dx}{2r}$; nella quale bisogna sostituire il valore di y^2 ricavato dall'equazione della curva, per aver indi per mezzo dell'integrazione la cubatura del solido.

976.

976. Così il raggio del cerchio generatore d'una sfera essendo $= r$, l'equazione a questo cerchio è $yy = 2rx - xx$: dunque la formula differenziale della cubatura diviene $cxdx - \frac{cxdx}{2r}$, il cui integrale $\frac{x}{2} cxx - \frac{cx^3}{6r}$ esprime la solidità d'un segmento della sfera, il cui raggio è r , e la grossezza x . Se dunque si fa $x = 2r$, s'avrà $2crr - \frac{4crr}{3} = \frac{6crr - 4crr}{3} = \frac{2}{3} crr = \frac{2}{3} \times 2r \times \frac{2}{3} cr$. Cioè a dire la solidità della sfera intera è uguale a due terzi del prodotto dell'asse per la superficie del suo cerchio massimo.

Per lo Metodo inverso delle Tangenti.

977. **S**I chiama il *metodo inverso delle tangenti* quello, per lo quale si scuopre la natura, o l'equazione d'una curva, essendo data solamente l'espressione algebrica della sua tangente, o della sua sotttangente, o della sua normale, o della sua sunnormale: si dice anche, che un Problema appartiene al metodo inverso delle tangenti, quando si cerca l'equazione d'una curva per l'espressione algebrica della sua rettificazione, della sua quadratura, &c..

Essendo dunque data l'espressione algebrica d'una linea, che appartiene alla tangente, bisogna farne un'equazione con l'espressione dif-

fe-

455

ferenziale della stessa linea (n° . 935 e segg.) e se si può integrar questa equazione s' avrà quella della curva , che si cerca .

978. Per esempio si dimanda , qual è la curva , la cui sottangente è $\frac{yy}{a}$. S' avrà dunque

(935) $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{a}$, o $aydx = yydy$, o $adx = ydy$: integrando , $ax = \frac{1}{2} yy$, o $2ax = yy$, equazione alla parabola , il cui parametro è $2a$.

979. Si domanda la curva , la cui funnoriale è $a - x$. Si ha (939) $\frac{ydy}{dx} = a - x$, o $ydy = adx - xdx$. Integrando , $\frac{1}{2} yy = ax - \frac{1}{2} xx$, o $yy = 2ax - xx$, ch' è l' equazione al cerchio .

980. Si domanda la curva , la cui funnoriale è costante o $= 1$, si ha $\frac{ydy}{dx} = y$; dunque $ydy = dx$; integrando , $\frac{1}{2} yy = x$, e $yy = 2x$; Equazione alla parabola , il cui parametro è $= 2$.

981. OSSER. Si applica anche nella Geometria il calcolo differenziale , e integrale all' espressioni Algebraiche , che anno esponenti variabili , come a^x , x^y , &c. , e all' equazioni delle curve , che anno termini affetti da simili esponenti : queste curve si chiamano *Esponenziali* , e il calcolo si chiama *Calcolo Esponenziale* : ma il dettaglio di tutte queste cose ci manderebbe troppo lungi .

F I N E₁

TAVOLA DE' CAPI.

I <i>Idea Generale delle Matematiche , e definizioni de' principali termini .</i>	pag. I
<i>Principali Affiomi .</i>	4
PARTE PRIMA. Dell'Arimetica .	
<i>Della natura de' numeri , loro formazione , e valore .</i>	5
<i>Delle operazioni dell' Arimetica .</i>	8
<i>Delle Regole dell' Addizione .</i>	9
<i>Della Sottrazione .</i>	11
<i>Della Moltiplicazione .</i>	14
<i>Delle divisione .</i>	19
<i>Delle Frazioni . Della natura delle frazioni in generale , loro valore , e comparazione .</i>	29
<i>Delle operazioni Arimetiche , che si possono fare sulle frazioni in generale .</i>	34
<i>Delle riduzioni delle frazioni .</i>	ibid.
<i>Dell' Addizione delle frazioni .</i>	41
<i>Della Sottrazione .</i>	42
<i>Della Moltiplicazione .</i>	43
<i>Della Divisione .</i>	46
<i>Delle Frazioni Decimali .</i>	49
<i>Delle operazioni sulle frazioni decimali .</i>	54
<i>Delle altre specie di frazioni .</i>	58
ELEMENTI D' ALGEBRA .	65
<i>Definizioni d' alcuni termini usati in Algebra .</i>	ibid.
<i>Delle operazioni Algebraiche .</i>	69
<i>Della composizione , e scomposizione delle quantità .</i>	83
	Per

<i>Per trovar tutti i divisori d' una quantità data.</i>	<u>86</u>
<i>Per elevare le quantità a Potenze date.</i>	<u>88</u>
<i>Delle differenti espressioni delle Potenze, e delle Radici.</i>	<u>90</u>
<i>Della Estrazione delle Radici.</i>	<u>93</u>
<i>Delle principali proprietà delle Potenze in numeri.</i>	<u>102</u>
<i>Della Estrazione della Radice cubica.</i>	<u>105</u>
<i>Metodo generale per estrarre per approssimazione tutte le radici delle potenze più elevate del Quadrato.</i>	<u>109</u>
<i>Calcolo degl' Incommensurabili.</i>	<u>111</u>
<i>Calcolo delle Potenze pe' loro Esponenti.</i>	<u>ibid.</u>
<i>Calcolo de' Radicali.</i>	<u>113</u>
<i>Delle Equazioni, o dell' Analisi.</i>	<u>121</u>
<i>Della Trasposizione.</i>	<u>123</u>
<i>Della divisione, e della Moltiplicazione.</i>	<u>124</u>
<i>Dell' Estrazion delle radici per l' equazioni del secondo grado.</i>	<u>ibid.</u>
<i>Della sostituzione.</i>	<u>129</u>
<i>Dello scioglimento de' Problemi per mezzo dell' Analisi.</i>	<u>131</u>
<i>Della Natura, e delle Proprietà Generali delle Equazioni di differenti gradi.</i>	<u>145</u>
<i>Delle Equazioni, che contengono radici immaginarie.</i>	<u>149</u>
<i>Riduzioni, e Trasformazioni delle Equazioni.</i>	<u>150</u>
<i>Per isciogliere l' equazioni composte, e trovare in numeri i valori delle incognite.</i>	<u>152</u>
<i>Della Comparazione delle Grandezze, ovvero Trattato delle Ragioni, e Proporzioni.</i>	<u>157</u>
<i>Proprietà delle Ragioni, Proporzioni, e Progressioni Arismetice.</i>	<u>161</u>
	<u>Del-</u>

Delle Ragioni, Proporzioni, e Progressioni Geometriche. 169

Proprietà delle Proporzioni Geometriche. 175

Proprietà delle Progressioni Geometriche. 179

Differenti Problemi sulle Proporzioni, e Progressioni Geometriche. 183

De' Logaritmi. Della loro natura, e uso. 193

Sull' uso delle Tavole de' Logaritmi, principalmente nelle operazioni delle frazioni. 197

Della proprietà della grandezza considerata nell' infinito. 205

Alcune nozioni sulle serie: della natura, e della formazione dello serie. 209

Della somma delle serie. 217

De' rapporti finiti, che an fra loro le somme infinite di serie infinite. 223

PARTE SECONDA.

Elementi di Geometria. 217

SEZIONE PRIMA. Delle linee. Origine, e proprietà generali delle linee. 228

Proprietà delle linee rette nella posizione d' una retta riguardo a un' altra. 230

Proprietà delle linee rette nella posizione d' una retta a riguardo di due, o di più altre, senza racchiudere spazio. 238

D' alcune proprietà delle linee rette per rapporto al cerchio. 245

Proprietà delle linee rette, che racchiudono uno spazio. 256

De' triangoli. Delle differenti specie, e proprietà del triangolo. 257

Della comparazione de' triangoli. 262

Degli altri poligoni. 265

Pro-

	459
<i>Proprietà de' poligoni in generale.</i>	266
<i>Proprietà de' poligoni simmetrici.</i>	268
<i>Proprietà de' poligoni regolari.</i>	270
<i>Proprietà del cerchio.</i>	275
<i>Delle Linee proporzionali.</i>	280
<i>Della comparazione delle figure.</i>	289
SEZIONE SECONDA . Delle Superficie . Del contorno delle superficie ; e della loro compara- zione .	293
<i>Delle misure proprie a determinar la grandezza delle superficie .</i>	294
<i>Del metodo generale di misurare le superficie.</i>	296
<i>Osservazioni sulla quadratura del cerchio.</i>	306
<i>Proprietà delle superficie piane , o de' piani .</i>	309
SEZIONE TERZA . De' Solidi .	315
<i>Origine , e proprietà de' solidi formati da un movi- mento rettilineo .</i>	317
<i>Origine , e proprietà de' solidi prodotti per un mo- vimento circolare .</i>	321
<i>De' poliedri , e' loro rapporti .</i>	326
<i>Della Comparazione de' solidi .</i>	330
<i>Della misura delle superficie di ciascuna specie di solidi .</i>	334
<i>Comparazioni delle superficie de' Solidi .</i>	340
<i>Della misura delle solidità di ciascuna specie di solidi .</i>	342
<i>Della Comparazione della solidità de' solidi .</i>	346
<i>Della Trigonometria .</i>	347
<i>Principj per la costruzione delle Tavole de' seni .</i>	352
<i>Principj per la Teoria del calcolo Trigonometri- co .</i>	355
<i>Ufi della Teoria precedente per li calcoli Trigonomet- rici .</i>	359
	Cal-

Calcolo de' triangoli rettangoli. 360

Calcolo de' triangoli obliquangoli. 362

TRATTATO ANALITICO DELLE SEZIONI CONICHE.

Nozioni Preliminari sulle curve ingenerale, e sulla
maniera d' esprimerne le principali proprietà per
l' *Analisi*. 365

Della natura, e proprietà principali delle sezioni
coniche descritte sopra un piano e considerate in
rapporto a' loro assi. 378

Proprietà delle sezioni coniche per rapporto a' loro dia-
metri. 404

Proprietà dell' Iperbole per rapporto a' suoi Asin-
toti. 410

Differenti problemi sopra le sezioni coniche. 416

PRINCIPI DEL CALCOLO INFINITESIMALE. 432

Del calcolo differenziale. Formole differenzia-
li. 435

Uti del calcolo differenziale. 439

Uti per trovare le Tangenti, Sottangenti, Norma-
li, e Sunnormali. 440

Per trovare i raggi di curvatura delle curve. 443

Per trovare i Massimi, e Minimi. 446

REGOLE, E USI DEL CALCOLO INTEGRA- LE. 444

Per la quadratura delle superficie piane, e curve. 447

Per la rettificazione delle curve. 450

Per la cubatura de' solidi. 453

Per lo metodo inverso delle tangenti. 454

Fine della Tavola de' Capi...

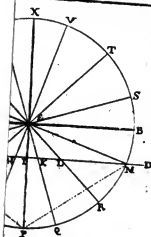


Fig. 6.

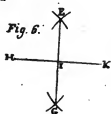
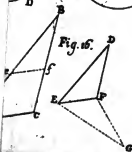
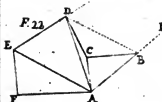


Fig. 16.

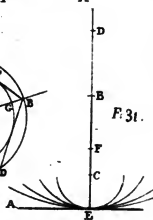




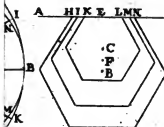
F. 21.

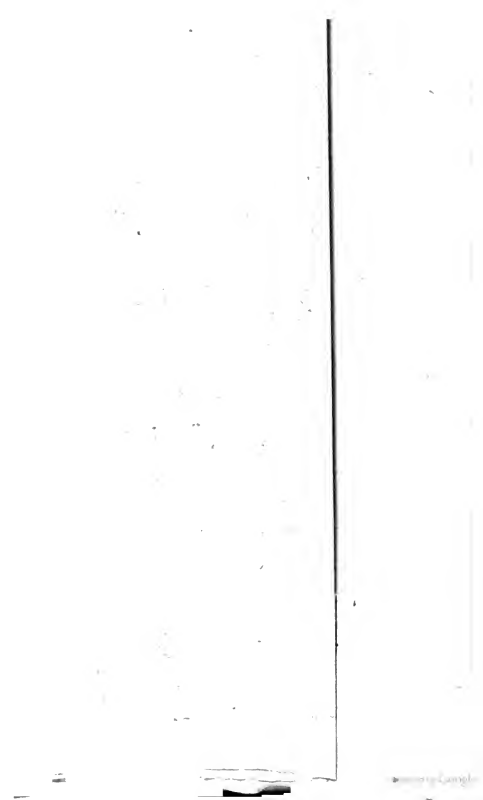


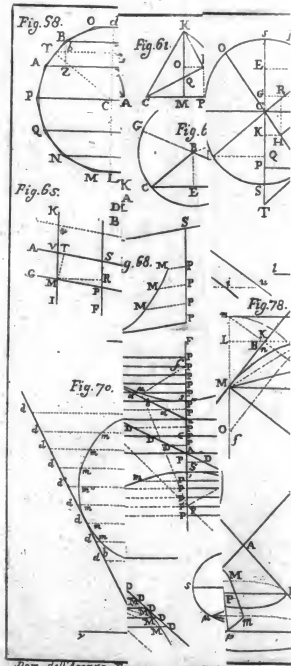
F. 31.

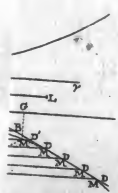
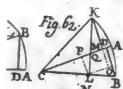


P. 32.









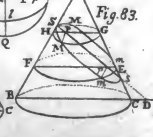
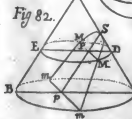
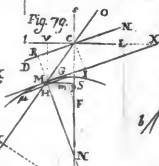
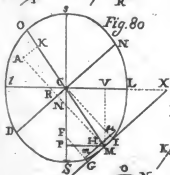
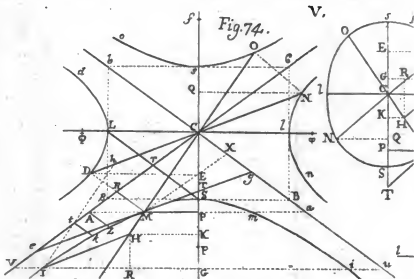


Fig 75.



Fig 76

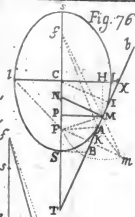


Fig 77.

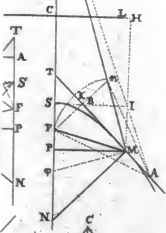
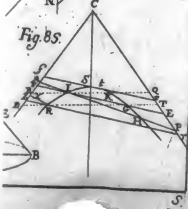
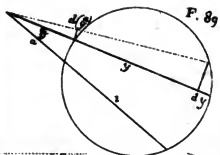
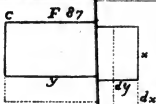
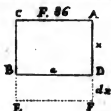
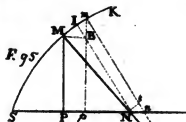
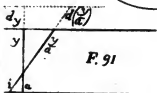


Fig 85.

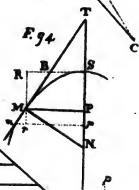




F. 90



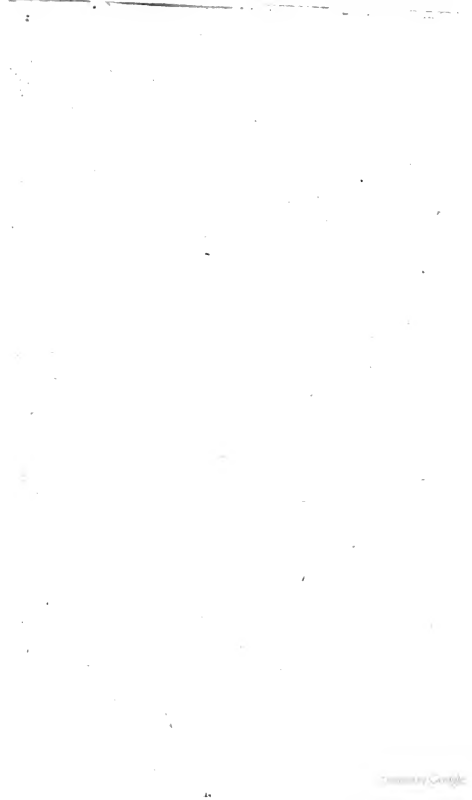
F. 94



F. 97







5-8-653

005653012

212

